EJERCITACION

SERIES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER

PARTE 1: SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER

Ejercicio n° 1:

Desarrolle las siguientes funciones de periodo $T=2\pi$ en Serie Trigonométrica de Fourier:

a) $f(x) = x^2$ si $0 < x < 2\pi$ y $f(x) = f(x+2\pi)$

b) A partir de la Serie obtenida en a), halle el resultado de la serie numérica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

c) $f(t) = t^2$ en $(-\pi, \pi)$ y $f(t + 2\pi) = f(t)$

d) A partir de la Serie obtenida en c), halle el resultado de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Ejercicio n° 2:

Desarrolle las siguientes funciones de período T en Serie Trigonométrica de Fourier:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,3) \\ -1 & \text{si } x \in (-3,0) \end{cases}$ y $f(x) = f(x+6)$

b) $f(t) = \begin{cases} 6 & \text{si } |t| < 2 \\ 0 & \text{si } 2 < |t| < 4 \end{cases}$ y $f(t) = f(t+8)$

c) $f(t) = \begin{cases} 8 & 0 < t < 2 \\ -8 & 2 < t < 4 \end{cases}$ y $f(t) = f(t+4)$

d) $f(t) = 4t \quad 0 < t < 10$ y $f(t) = f(t+10)$

Ejercicio n° 3:

Sea $f(t) = \begin{cases} 2-t & 0 < t < 4 \\ t-6 & 4 < t < 8 \end{cases}$ y $f(t) = f(t+8)$

a) Grafique la función f(t) y redefínala para el período (-4;4)

b) En función al punto anterior desarrolle la STF teniendo en cuenta la paridad de la función.

c) En base a la respuesta anterior calcule $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

Ejercicio n° 4:

Dadas las siguientes funciones definidas sólo en un intervalo:

a) $f(x) = \text{sen } x \qquad x \in (0,\pi)$
b) $f(x) = x \qquad x \in (0,2)$
c) $f(t)=\cos(t) \qquad 0<t<\pi$
d) $f(t) = e^t \qquad 0<t<1$
e) $f(t) = \pi - t \qquad 0<t<\pi$

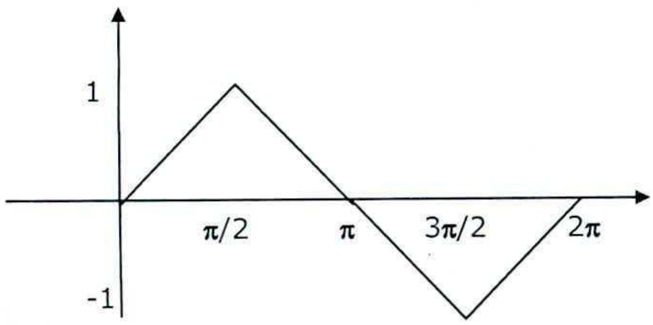
i) Complete cada función en todo el eje real para que la Serie Trigonométrica de Fourier sea solo de cosenos y desarrolle cada Serie.

ii) Idem anterior pero Serie de Senos.

Ejercicio n° 5:

El desarrollo en serie de Fourier de la onda triangular (ver figura) es:

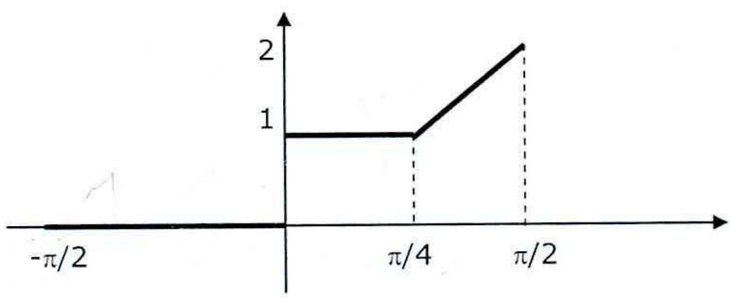
$$S(x) = \frac{8}{\pi^2}\left(\text{sen}(wt) - \frac{1}{9}\text{sen}(3wt) + \frac{1}{25}\text{sen}(5wt) - \frac{1}{49}\text{sen}(7wt) + \cdots \right)$$



a) ¿Por qué sólo aparecen términos con senos?
b) ¿Por qué sólo aparecen términos con frecuencias impares?

Ejercicio n° 6:

Dada la siguiente función definida en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



Complete la función en $[-\pi,\pi]$ para que tenga simetría de media onda.

Ejercicio n° 7:

a) Si una función es par y además tiene simetría de media onda, ¿qué términos serán nulos de la Serie Trigonométrica de Fourier?

b) Sea $S(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{2n-1}}{n}\operatorname{sen}(nx)$ la S.T.F. de f(x)

¿Puede ser f(x) una función par? ¿O impar? Justifique.

PARTE 2: SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER

Ejercicio n° 8:

Dadas las siguientes funciones, grafíquelas, desarróllelas en Serie Exponencial de Fourier y grafique el espectro de amplitud de frecuencias:

a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2<t<2 \\ 0 & \text{si } 2<|t|<10 \end{cases}$ y $f(t) = f(t+20)$

b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t\in(0,2) \\ 4-t & \text{si } t\in(2,4) \end{cases}$ y $f(t + 4) = f(t)$

c) $f(t)=2t$ si $t \in [0,2)$ y $f(t) = f(t+2)$

OPTATIVO: $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2<t<0 \\ t^2 & \text{si } 0<t<2 \end{cases}$ y $f(t + 4) = f(t)$

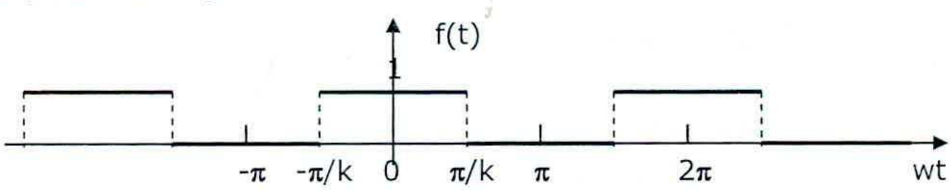
Ejercicio n° 9:

a) Sea $f(t) = t^2$ si $0 \le t < 1$ Complete en forma gráfica y analítica la función para que el desarrollo en Serie Exponencial de Fourier tenga coeficientes imaginarios puros y además f(t) tenga simetría de media onda.

b) Dé un ejemplo de una función periódica f(x) con T=2 tal que los coeficientes de la Serie Exponencial de Fourier sean todos imaginarios puros excepto el $c_0 = 3$

Ejercicio n° 10:

Sea el pulso rectangular:



a) Grafique el espectro de amplitud para k=3 , k=5, k=10

b) ¿Qué conclusiones puede sacar?

PARTE 3: TRANSFORMADA DE FOURIER

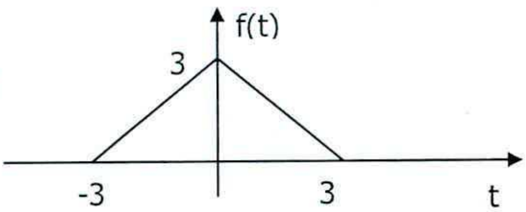
Ejercicio n° 11:

Halle las Transformadas de Fourier de las siguientes funciones y dibuje su espectro continuo de amplitud:

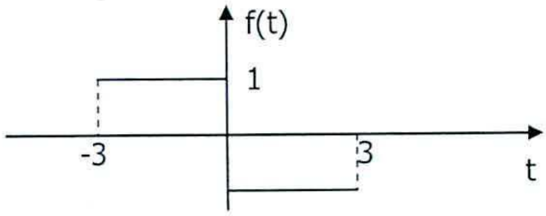
a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 3 \\ 0 & \text{si } |t| > 3 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

c)



d)



e) $f(x) = x$ si $0 \leq x \leq 5$ y $f(x) = 0$ en caso contrario.

f) $f(x) = 3 - x$ si $0 \leq x \leq 3$ y $f(x) = 0$ en caso contrario.

Ejercicio n° 12:

En base al ejercicio anterior(parte a), calcule el valor de la integral: $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$

PARTE 4: EJERCICIOS VARIOS

Ejercicio n° 13:

Desarrolle $f(t) = \operatorname{sen}^5 t$ en S.T.F. (Sugerencia: desarrolle Binomio de Newton)

Ejercicio n° 14:

Analice la validez de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta:

a) El desarrollo en S.T.F. de la función $f(t) = |t| - 3$ para $t \in (-6,6)$ y $f(t)=f(t+12)$ sólo tiene términos con cosenos de frecuencias pares.

b) Los coeficientes c_n del desarrollo en S.E.F. de la función anterior son todos reales.

c) El desarrollo en S.T.F. de la función $f(t) = |t-2|$ para $t \in (0,4)$ y $f(t)=f(t+4)$ sólo tiene términos con frecuencias impares.

d) Los coeficientes c_n del desarrollo en S.E.F. de la función anterior son imaginarios puros.

e) Si el desarrollo en S.T.F. de una función f(t) sólo tiene términos con frecuencias impares, entonces f(t) tiene simetría de media onda.

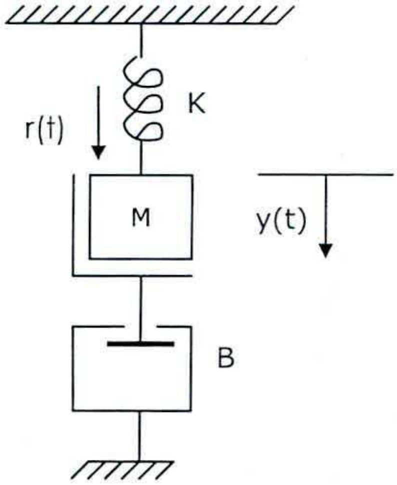
f) Si el desarrollo en S.T.F. de una función f(t) no tiene términos con cosenos, entonces f(t) es una función impar.

g) Sean f y g funciones periódicas con dominio en R. Si el desarrollo en Serie de Fourier de f es el mismo que el de g, entonces $f(t) = g(t) \ \forall t \in R$

h) Al desarrollar la función $f(t) = \text{sen}(\pi t)$ si $t \in (0,1)$ y $f(t)=f(t+1)$ en Serie Exponencial de Fourier sólo hay términos con coeficientes reales.

☑ Ejercicio n° 15:

Consideremos las **oscilaciones forzadas** de un cuerpo de masa M suspendido de un resorte son regidas por la ecuación diferencial: $M y'' + B y' + K y = r(t)$ (1)



donde K es la constante elástica del resorte y B es el factor de amortiguamiento.
Si la fuerza externa es senoidal o cosenoidal, y el coeficiente $B \neq 0$, entonces la solución de estado estacionario representa una oscilación armónica que tiene la misma frecuencia que la fuerza externa.
En cambio, si la fuerza externa r(t) no es senoidal, sino es cualquier otra función periódica, entonces la solución de estado estacionario representa una superposición de oscilaciones armónicas que tienen la frecuencia de r(t) y sus múltiplos.

Si la frecuencia de una de estas oscilaciones está cercana a la resonante del sistema vibrante, entonces esa oscilación será la parte dominante de la respuesta del sistema a la fuerza externa.

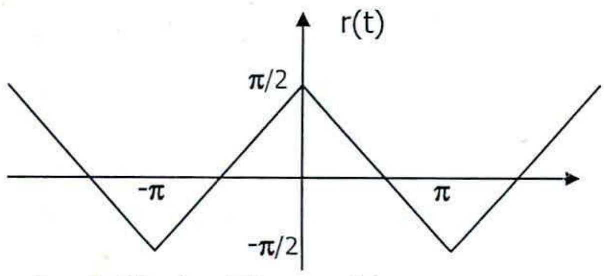
Caso particular:

(extraído de la bibliografía : Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Kreyszig)

Sea M= 1 [g.] B = 0.02 [g./s] K= 25 [g./s^2]

$$r(t) = \begin{cases} t + \pi/2 & \text{si } -\pi < t < 0 \\ -t + \pi/2 & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases}$$

$\wedge \ r(t+ 2\pi) = r(t)$



Entonces la ecuación (1) queda: $y'' + 0.02 y' + 25 y = r(t)$

Se pide: hallar la respuesta de estado estacionario y(t).

EJERCICIOS PARA MARCAR LA RESPUESTA CORRECTA, tomados en Finales:

☑ Ejercicio n° 16:

Marcar la única respuesta correcta de cada ítem:

1.	De las siguientes funciones, la que tiene la S.T.F. sólo de cosenos con valor medio distinto de 2 es: a) $f_1(t) = t^2$ si $t \in (0,2)$ $\wedge$ $f_1(t) = f_1(t+2)$ b) $f_2(t) = t$ si $t \in (0,6)$ $\wedge$ $f_2(t) = f_2(t+6)$ c) $f_3(t) = t$ si $t \in (0,4)$ $\wedge$ $f_3(t) = -t$ si $t \in (-4,0)$ $\wedge$ $f_3(t) = f_3(t+8)$ d) $f_4(t) = 3$ si $t \in (-1,1)$ $\wedge$ $f_4(t) = 1$ si $1 < \|t\| < 3$ $\wedge$ $f_4(t) = f_4(t+6)$
2.	De las siguientes funciones, la que tiene la S.E.F. con coeficientes reales y sólo de frecuencias impares es: a) $f_1(t) = t^2$ si $t \in (-2,2)$ $\wedge$ $f_1(t) = f_1(t+4)$ b) $f_2(t) = t$ si $t \in (0,4)$ $\wedge$ $f_2(t) = f_2(t+4)$ c) $f_3(t) = t$ si $t \in (0,4)$ $\wedge$ $f_3(t) = -t$ si $t \in (-4,0)$ $\wedge$ $f_3(t) = f_3(t+8)$ d) $f_4(t) = 3$ si $t \in (-1,1)$ $\wedge$ $f_4(t) = 1$ si $1 < \|t\| < 3$ $\wedge$ $f_4(t) = f_4(t+6)$
3.	La función $f(t) = t$ en $(0,2)$ y $f(t) = f(t+2)$ tiene su S.T.F. : a) sólo con senos b) sólo con cosenos c) con valor medio 1 d) Ninguna de las anteriores
4.	Los coeficientes de la Serie Exponencial de Fourier de $f(x) = x^2$ en $(0,1)$ $\wedge$ $f(x) = f(x+1)$ son: a) todos reales b) todos imaginarios puros c) uno real y los demás imaginarios d) ninguna es correcta
5.	La función $f(t) = e^{\|t\|}$ en $[-1,1]$ y $f(t) = f(t+2)$ tiene su desarrollo en S.T.F.: a) con valor medio nulo b) sólo frecuencias impares c) sin términos con senos d) sólo frecuencias pares

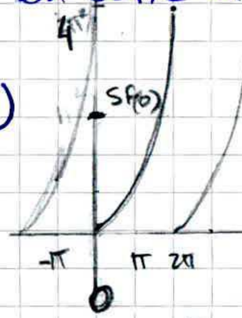
6.	La serie trigonométrica de Fourier de $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)$ es: a) la misma función b) Una serie con infinitos términos no nulos en senos c) Un sólo término d) Una serie con infinitos términos no nulos en cosenos
7.	Dada $f(t) = t^2$ si $t \in (0,1)$ $\wedge$ $f(t) = 2 - (t-2)^2$ si $t \in (1,2)$ $\wedge$ $f(t) = f(t+2)$ entonces su STF es: a) sin cosenos b) con valor medio $a_0/2 = 0$ c) sólo de cosenos d) sólo de frecuencias impares
8.	La serie trigonométrica de Fourier: $S(x) = 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(n\frac{\pi}{2}x)$ puede corresponder a: a) $f(x) = 2 - \vert x \vert$ si $x \in (-2,2)$ $\wedge$ $f(x) = f(x+4)$ b) $f(x) = x^2$ si $x \in (-2,2)$ $\wedge$ $f(x) = f(x+4)$ c) $f(x) = x$ si $x \in (0,4)$ $\wedge$ $f(x) = f(x+4)$ d) ninguna de las anteriores
9.	Dada la función: $f(x) = x + 1$ en $[0, 1)$, para que tenga simetría de media onda con periodo $T=2$ hay que definirla en $[1, 2)$: a) $x + 1$ b) $-x$ c) $-x-1$ d) $-x+1$
10.	La señal: $f(x) = x^2 - 2$ si $x \in [0;2)$ y $f(x) = f(x+2)$ tiene su Serie Trigonométrica de Fourier: a) con valor medio negativo b) sólo de senos c) tal que $S(2) = -2$ d) ninguna de las anteriores

Series y transformadas de Fourier

MatSup

PARTE 1 Serie trigonométrica de Fourier

① Desarrolle las sig. funciones de período $T=2\pi$ en Serie trigonométrica de Fourier:



a) $f(x) = x^2$ si $0 \leq x < 2\pi$ y $f(x) = f(x+2\pi)$

• $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8}{3}\pi^2 \longrightarrow \boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{4}{3}\pi^2}$

• $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\cos(nx) + \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\operatorname{sen}(nx)\right]\Big|_0^{2\pi} =$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{4\pi}{n^2} + 0 - 0\right] = \frac{1}{\pi}\,\frac{4\pi}{n^2} = \boxed{\frac{4}{n^2} = a_n}$

• $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\operatorname{sen}(nx) + \left(\frac{2}{n^3} - \frac{x^2}{n}\right)\cos(nx)\right]\Big|_0^{2\pi} =$

$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\frac{2}{n^3}} - \frac{4\pi^2}{n} - \cancel{\frac{2}{n^3}}\right] = \frac{1}{\cancel{\pi}}\left(-\frac{4\pi^{\cancel{2}}}{n}\right) = \boxed{\frac{-4\pi}{n} = b_n}$

$$\boxed{Sf(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\operatorname{sen}(nx)\right]}$$

b) A partir de la serie obtenida en a), halle el resultado de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

en $x=0 \rightarrow Sf(0)$ es el promedio de límites laterales $\rightarrow Sf(0) = \frac{4\pi^2}{2}$

$Sf(0) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2}\cos(0n) - \frac{4\pi}{n}\operatorname{sen}(0n)\right] =$

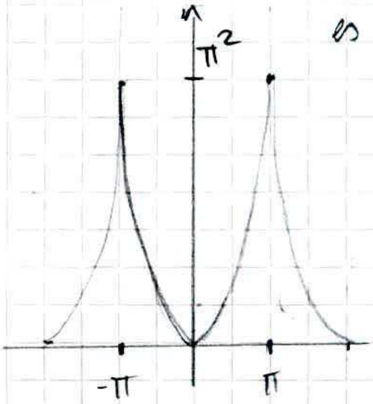
$= \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = 2\pi^2$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = 2\pi^2 - \frac{4}{3}\pi^2 = \frac{2}{3}\pi^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$\frac{2}{4}\frac{\pi^2}{3} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

Sylvina

c) $f(t) = t^2$ en $(-\pi, \pi)$ y $f(t) = f(t+2\pi)$



es función par (simétrica reflexiva con respecto al eje 'y')

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi^{3}}{3} = \frac{2\pi^2}{3} = a_0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{2x}{n^2}\cos(nx) + \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\operatorname{sen}(nx)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n + 0 - \frac{2(-\pi)}{n^2}(-1)^n\right] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4\pi}{n^2}(-1)^n = \boxed{\frac{4}{n^2}(-1)^n = a_n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\operatorname{sen}(nx) + \left(\frac{2}{n^3} - \frac{x^2}{n}\right)\cos(nx)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)(-1)^n - \left(\frac{2}{n^3} - \frac{(-\pi)^2}{n}\right)(-1)^n\right] = 0 = b_n$$

$$\boxed{Sf(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nx)}$$

d) A partir de la serie obtenida en c), halle el resultado de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

$Sf(0) = 0$ (ver gráfico)

$$Sf(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n \longrightarrow -\frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

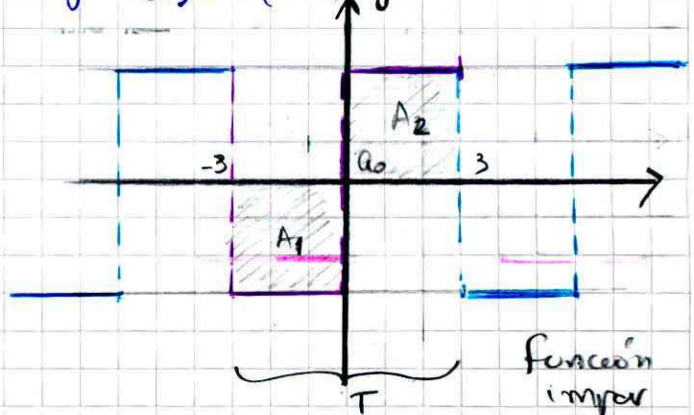
$$\rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$$

Mat Sup.

② Desarrolle las sig. funciones de período T en Serie trigonométrica de Fourier:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,3) \\ -1 & \text{si } x \in (-3,0) \end{cases}$ y $f(x) = f(x+6)$



$T = 6 \rightarrow L = 3$ $\boxed{\omega = \frac{\pi}{3}}$

en $a_0 = 0 \rightarrow A_1 = A_2$

• $\boxed{a_0 = 0}$

función impar $\rightarrow b_n \neq 0$

• $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos(m x \omega)\, dx =$

$= \frac{1}{3} \int_{-3}^{0} -1 \cos\left(m x \frac{\pi}{3}\right) dx + \frac{1}{3} \int_{0}^{3} 1 \cos\left(m x \frac{\pi}{3}\right) dx =$

$= \frac{-1}{3} \cdot \left. \frac{\operatorname{sen}\left(m x \frac{\pi}{3}\right)}{m \frac{\pi}{3}} \right|_{-3}^{0} + \frac{1}{3} \cdot \left. \frac{\operatorname{sen}\left(m x \frac{\pi}{3}\right)}{m \frac{\pi}{3}} \right|_{0}^{3} =$ $\boxed{a_n = 0}$

$= \frac{1}{3} \left(\left. \frac{\operatorname{sen}(m x \pi/3)}{m \pi/3} \right|_{0}^{-3} + \left. \frac{\operatorname{sen}(m x \pi/3)}{m \pi/3} \right|_{0}^{3} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\overset{-\operatorname{sen}(m\pi)}{\operatorname{sen}(-m\pi)}}{m \pi/3} + \frac{\operatorname{sen}(m\pi)}{m\pi/3} \right)$

• $b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}(m \omega x)\, dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^{0} -1 \operatorname{sen}(m x \pi/3) dx + \int_{0}^{3} 1 \operatorname{sen}(m x \pi/3) dx \right] =$

$= \frac{1}{\cancel{3}} \left[+ \left. \frac{\cos(m x \pi/3)}{\frac{m\pi}{\cancel{3}}} \right|_{-3}^{0} + \left. \frac{-\cos\, m x \pi/3}{\frac{m\pi}{3}} \right|_{0}^{3} \right] = \frac{-1}{m\pi} \left(-1 - (-\cos(-m\pi)) + \cos(m\pi) - 1 \right) =$

$= \frac{-1}{m\pi} \left(-1 + \underbrace{\cos(-m\pi)}_{(-1)^m} + \underbrace{\cos(m\pi)}_{(-1)^m} - 1 \right) = \frac{-1}{m\pi} \left(2(-1)^m - 2 \right) = \frac{2}{m\pi} \left((-1)^m - 1 \right)$

Para m par: $b_n = 0$

Para m impar: $b_m = \frac{2}{m\pi}(2) = \boxed{\frac{4}{m\pi} = b_m}$ $m = 2k+1$

k	m → solo impares	b_m
0	0	0
0	1	$+4/m\pi$
	2	0
1	3	$+4/m\pi$
	4	0
2	5	$+4/m\pi$

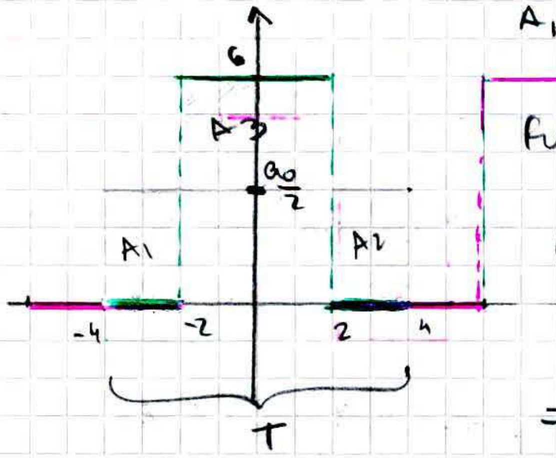
$b_m = b_{2k+1} = \frac{+4}{(2k+1)\pi}$

$$\boxed{Sf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}\left((2k+1)\frac{\pi}{3} x\right)}$$

Sol

b)
$$f(t) = \begin{cases} 6 & \text{si } |t| < 2 \\ 0 & \text{si } 2 < |t| < 4 \end{cases} \quad y \; f(t) = f(t+8)$$

$$T = 8 \rightarrow L = 4 \rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$$



$A_1 + A_2 = A_3$

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = 3}$$

función par $\rightarrow \boxed{b_n = 0}$

$$a_n = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x) \cos(n\omega x)\, dx =$$

$$= \frac{2}{4}\int_0^2 6 \cos\left(n \frac{\pi}{4} x\right) dx =$$

$$= 3\left[\frac{\operatorname{sen}(n x \pi/4)}{n\pi/4}\Big|_0^2\right] = \frac{3 \cdot 4}{n\pi} \cdot \operatorname{sen}(n\pi/2) = a_n$$

n = 0 → 0
n = 1 → 1
n = 2 → 0
n = 3 → -1
n = 4 → 0
n = 5 → 1
n = 6 → 0
n = 7 → -1

si n par → 0
si n = ?

$$\boxed{a_n = \frac{12}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi/2)}$$

$$\boxed{S(t) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{12}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}^{a_n} \cdot \cos\left(n \frac{\pi}{4} t\right)}$$

en pares es 0
→ sólo impares

$n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{R}$

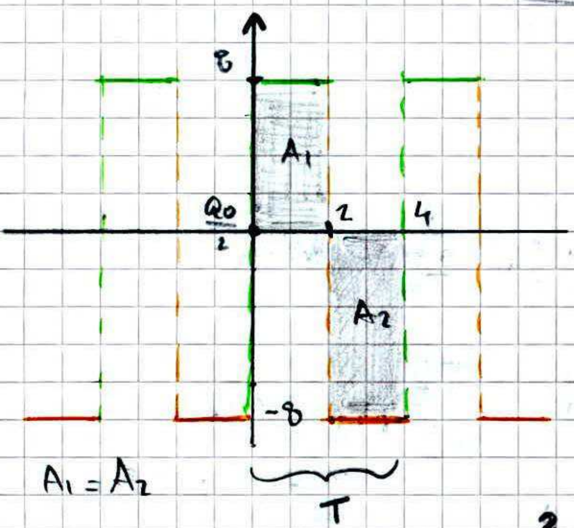
$$\boxed{S(t) = 3 + \frac{12}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \cos\left((2k+1) \frac{\pi}{4} t\right)}$$

k	n	sen(π/2)
0	1	1
1	3	-1
2	5	1
3	7	-1

$$\rightarrow \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$$

c)
$$f(t) = \begin{cases} 8 & 0 < t < 2 \\ -8 & 2 < t < 4 \end{cases} \qquad y\ f(t) = (t+4)$$

$$T = 4 \rightarrow L = 2 \rightarrow \boxed{w = \frac{\pi}{2}}$$



$A_1 = A_2$

función impar. $\rightarrow a_0 = 0$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^T f(x)\ \text{sen}(n\ w\ x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\ \text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\int_0^2 8\ \text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right) dx = 8\left.\left(\frac{-\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right)\right|_0^2 =$$

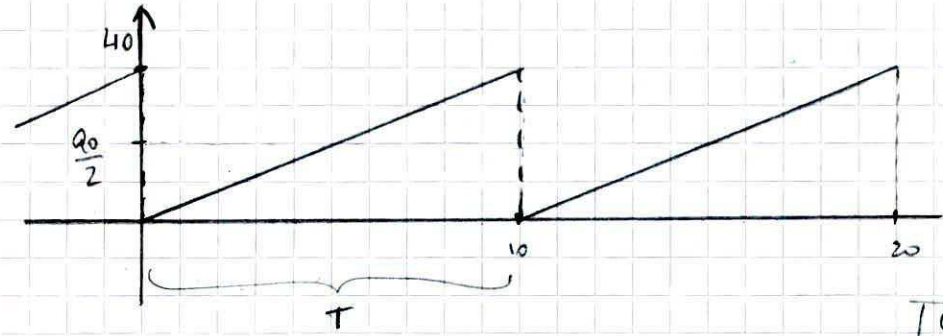
$$= \frac{16}{n\pi}\cdot\left(-\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} - -\underbrace{\cos(0)}_{1}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} n \text{ par} \rightarrow 0 \\ n \text{ impar} \rightarrow \frac{+32}{\pi} \end{array}$$

$n = 2k+1$

$$b_n = \frac{16}{n\pi}\cdot\left(1 - (-1)^n\right) \longrightarrow b_{2k+1} = \frac{32}{(2k+1)\pi}$$

$$\boxed{S(t) = \frac{32}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot\text{sen}\left((2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}t\right)}$$

d) $f(t) = 4t \quad 0<t<10 \quad$ y $f(t) = f(t+10)$



$T = 10$

$L = 5$

$w = \frac{\pi}{5}$

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = 20}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{10} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{1}{5}\int_0^{10} 4t \cdot \cos\left(n\frac{\pi}{5}t\right)dt =$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{5}\right)}{\left(\frac{n\pi}{5}\right)^2} + t\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{5}\right)}{\left(\frac{n\pi}{5}\right)}\right)\Bigg|_0^{10} = \frac{4}{5}\underbrace{\left(25\,\frac{\overbrace{\cos(2\pi n)}^{1}}{n^2\pi^2} + \frac{50\,\overbrace{\operatorname{sen}(2\pi n)}^{0}}{n\pi} - \frac{25}{n^2\pi^2}\right)}_{0} =$$

$$\boxed{a_n = 0}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{T} f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)\,dt = \frac{1}{5}\int_0^{10} 4t\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{5}t\right)dt =$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{5}\right)}{\left(\frac{n\pi}{5}\right)^2} - t\,\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{5}\right)}{\left(\frac{n\pi}{5}\right)}\right]\Bigg|_0^{10} = -\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{n\pi}\left[10\cdot\overbrace{\cos(2n\pi)}^{1}\right] = \frac{-40}{n\pi}$$

$$\boxed{b_n = -\frac{40}{n\pi}}$$

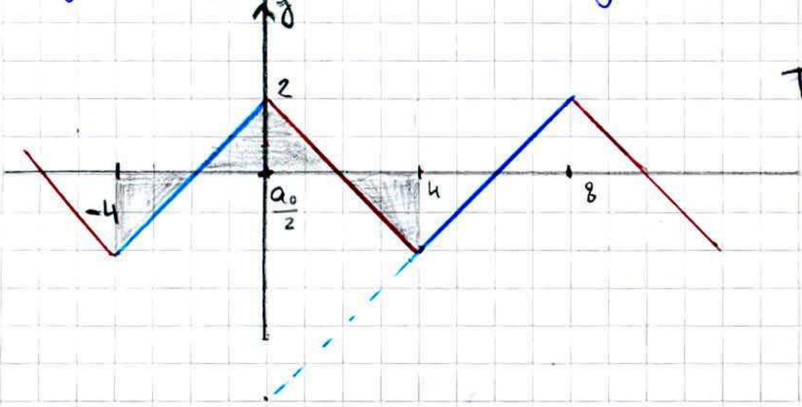
$$\boxed{S(t) = 20 - \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \cdot t}{5}\right)}$$

Mat Sup.

(3) Sea:

$$f(t) = \begin{cases} 2-t & 0<t<4 \\ t-6 & 4<t<8 \end{cases} \quad y \quad f(t) = f(t+8)$$

a) Grafique la función $f(t)$ y redefínala para el periodo $(-4, 4)$



$T = 8 \rightarrow L = 4 \rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} t+2 & -4<t<0 \\ 2-t & 0<t<4 \end{cases}}$$

$f(t) = (t+8)$

b) En función al punto anterior desarrolle la STF teniendo en cuenta la paridad de la función.

función par $\rightarrow \boxed{b_n = 0}$; $\boxed{\frac{a_0}{2} = 0}$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right)dt = \frac{1}{4_2}\cancel{2}\int_0^4 (2-t)\cos\left(\frac{n\pi t}{4}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^4 \cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right)dt - \int_0^4 t\cos\left(\frac{n\pi t}{4}\right)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{4}\right)}{\frac{n\pi}{4}}\Bigg|_0^4 - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{4}\right)}{\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2} + \frac{t\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{4}\right)}{\frac{n\pi}{4}}\right]\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{2}n\pi}\overbrace{\operatorname{sen}(n\pi)}^{0} - \frac{1}{\cancel{2}_1}\frac{\cancel{16}^8}{n^2\pi^2}\left(\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}-1\right) - \frac{4}{n\pi}\cdot\frac{4}{2}\cdot\overbrace{\operatorname{sen}(n\pi)}^{0} = -\frac{8}{n^2\pi^2}\left(\underbrace{(-1)^n-1}\right)$$

n impar $\rightarrow -2$
n par $\rightarrow 0$

$$n = 2k+1 \rightarrow a_{2k+1} = \frac{16}{(2k+1)^2\pi^2} \rightarrow \boxed{S(t) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cdot\cos\left(\frac{n\pi t}{4}\right)}$$

c) En base a la respuesta anterior calcule $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}. \qquad S(0) = 2$$

$$S(0) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cdot\overbrace{\cos(0)}^{1} = 2 \rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Sil

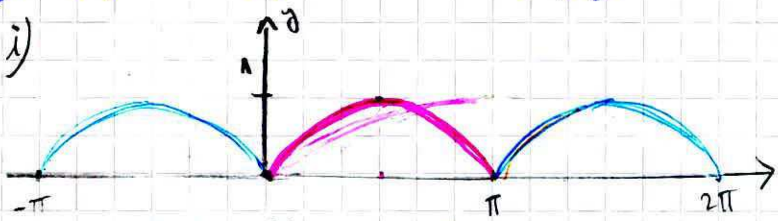
(4) Dadas las siguientes funciones definidas sólo en un intervalo:

i) Complete cada función en todo el eje real para que la serie trigonométrica de Fourier sea solo de cosenos y desarrolle cada serie.

ii) Idem anterior pero Serie de senos

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad x \in (0, \pi)$

i)



i) solo cosenos $\rightarrow b_n = 0$

ii) Solo senos $\rightarrow a_n = 0$

$T = 2\pi \quad L = \pi$

$f(t) = |\operatorname{sen}(t)|$

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t) & \text{si } 0 < t < \pi \\ \operatorname{sen}(-t) & \text{si } -\pi < t < 0 \end{cases} \qquad f(t) = f(t+\pi)$$

• $\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t)\,dt = \boxed{\dfrac{2}{\pi} = \dfrac{a_0}{2}}$

• $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t)\cos(nt)\,dt =$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos((1-n)t)}{2(1-n)} + \frac{\cos((1+n)t)}{2(1+n)}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{(1+n)\cos((1-n)t) + (1-n)\cos((1+n)t)}{1-n^2}\right) =$$

$$= \frac{-1}{\pi(1-n^2)} \cdot \frac{(1+n)\cos((1-n)\pi) + (1-n)\cos((1+n)\pi) - (1+n) - (1-n)}{1-n^2} =$$

$$= \frac{-1}{\pi(1-n^2)}\left((1+n)(-1)^{n+1} + (1-n)(-1)^{n+1} - 1 - n - 1 + n\right) =$$

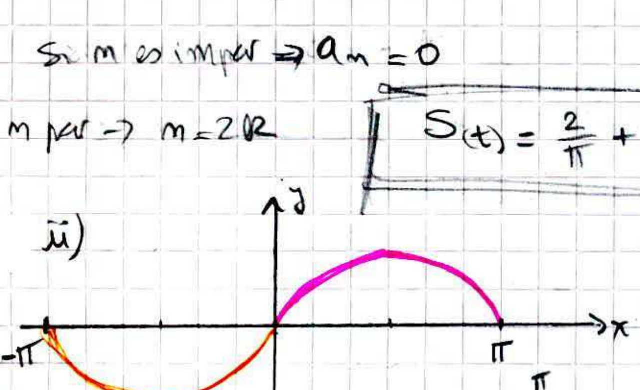
$$= -\frac{1}{\pi(1-n^2)}\left((-1)^{n+1} + \cancel{n(-1)^{n+1}} + (-1)^{n+1} - \cancel{n(-1)^{n+1}} - 2\right) = \frac{-2(-1)^{n+1} + 2}{\pi(1-n^2)}$$

Si n es impar $\Rightarrow a_n = 0$ $\qquad$ si n es par $\therefore a_n = \dfrac{4}{\pi(1-n^2)}$

n par $\rightarrow n = 2k$

$$\boxed{S(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2kt)}$$

ii)



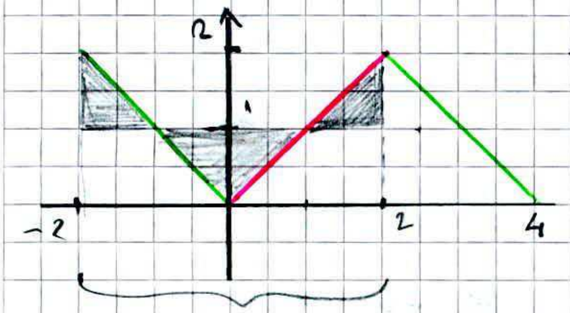
$f(t) = \operatorname{sen}(t) \quad 0 < t < \pi \quad$ y $f(t) = f(t+\pi)$

función impar $\rightarrow \boxed{a_n = 0}$ $\qquad \boxed{\dfrac{a_0}{2} = 0}$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}((1-n)t)}{2(1-n)} - \frac{\operatorname{sen}((1+n)t)}{2(1+n)}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi(1-n^2)}\left[(1+n)\operatorname{sen}((1-n)\pi) - (1-n)\operatorname{sen}((1+n)\pi)\right] = 0 \quad \rightarrow \boxed{S(t) = \operatorname{sen}(t)}$$

b) $f(x) = x \quad x \in (0,2)$



i) cosenos → par → $b_n = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 2 \\ -x & \text{si } -2 < x < 0 \end{cases}, \quad f(x) = f(x+4)$$

$T = 4 \rightarrow L = 2 - \omega = \frac{\pi}{2}$, $\boxed{\frac{a_0}{2} = 1}$ $\boxed{b_n = 0}$

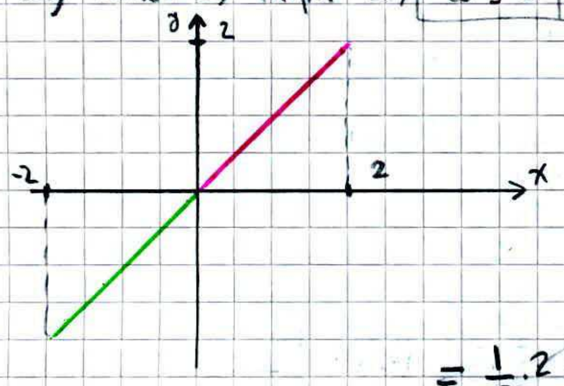
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\omega x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^2 x\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} + x\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{(n\pi)^2}\left(\overset{(-1)^n}{\cos(n\pi)} - 1\right) \begin{cases} n \text{ par} \rightarrow 0 \\ n \text{ impar} \rightarrow \frac{-8}{n^2\pi^2} \end{cases}$$

si n impar $a_n = \frac{-8}{n^2\pi^2} \xrightarrow{n \text{ impar} \Rightarrow n = 2k+1} \boxed{a_{2k+1} = \frac{-8}{(2k+1)^2\pi^2}}$

$$\boxed{S(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)} \checkmark$$

ii) senos → impar → $\boxed{a_0 = 0}$ $\boxed{a_n = 0}$



$T = 4 \rightarrow L = 2 \rightarrow \omega = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = x \quad -2 < x < 2 \quad f(x) = f(x+4)$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}(n\omega x)\,dx =$$

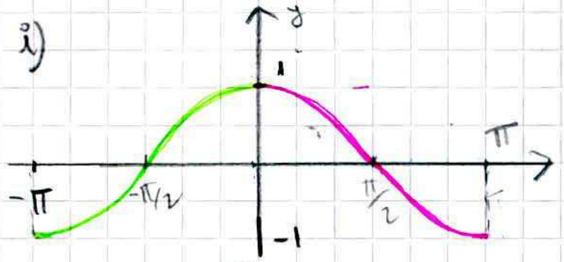
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^2 x\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} - \frac{x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cdot 2\cdot \overset{(-1)^n}{\cos(n\pi)} = \boxed{\frac{-4}{n\pi}(-1)^n = b_n}$$

$$\boxed{S(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right)} \checkmark$$

c) $f(t) = \cos(t)$ $\quad 0 < t < \pi$

i)



cosenos → par → $\boxed{b_n = 0}$

$\boxed{a_0 = 0}$ $\qquad f(t) = \cos(t)$

$T = 2\pi \rightarrow L = \pi$ $\qquad 0 < t < \pi$

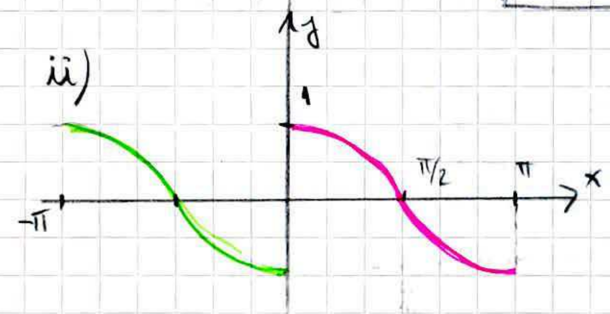
$f(t) = f(t + 2\pi)$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t)\cos(nt)\,dt =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}((1-n)t)}{\cancel{2}(1-n)} + \frac{\operatorname{sen}((1+n)t)}{\cancel{2}(1+n)}\right]\Bigg|_0^{\pi} = \boxed{0 = a_n}$$

$$\boxed{S(t) = \cos(t)}$$

ii)



impar (senos) → $a_n = 0$, $a_0 = 0$

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si } 0 < t < \pi \\ -\cos(t) & \text{si } -\pi < t < 0 \end{cases}$$

y $f(t) = f(t + 2\pi)$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,.\operatorname{sen}(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t)\operatorname{sen}(nt)\,dt =$$

$$= -\frac{\cancel{2}}{\pi}\left[\frac{\cos[(n-1)t]}{\cancel{2}(n-1)} + \frac{\cos[(n+1)t]}{\cancel{2}(n+1)}\right]\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi(n^2-1)}\cdot\Big[(n+1)\overbrace{\cos[(n-1)\pi]}^{(-1)^{n+1}} + (n-1)\overbrace{\cos[(n+1)\pi]}^{(-1)^{n+1}} - (n+1) - (n-1)\Big] =$$

$$= \frac{-1}{\pi(n^2-1)}\left(n(-1)^{n+1} + \cancel{(-1)^{n+1}} + n(-1)^{n+1} - \cancel{(-1)^{n+1}} - n - \cancel{1} - n + \cancel{1}\right) =$$

$$= \frac{-1}{\pi(n^2-1)}\; 2n(-1)^{n+1} - 2n = \frac{-2n}{\pi(n^2-1)}\left((-1)^{n+1} - 1\right) \xrightarrow{\text{si } n \text{ impar}} 0$$

si n par → $\boxed{\frac{4n}{\pi(n^2-1)} = b_n}$

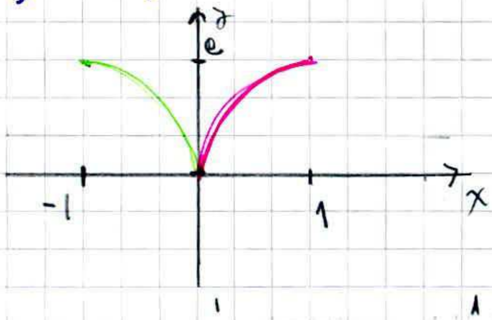
n impar → $b_n = 0$

n par ⟶ $n = 2k$ ⟶ $b_{2k} = \frac{8k}{\pi(4k^2-1)}$

$$\boxed{S(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\,.\operatorname{sen}(2kt)}$$

Mat-Sup.

d) $f(t) = e^t \qquad 0<t<1$



i) par (cosenos) $\rightarrow \boxed{b_n = 0}$

$T = 2 \qquad L = 1 \qquad \omega = \pi$

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } 0<t<1 \\ -e^t & \text{si } -1<t<0 \end{cases} \quad y\ f(t) = f(t+2)$$

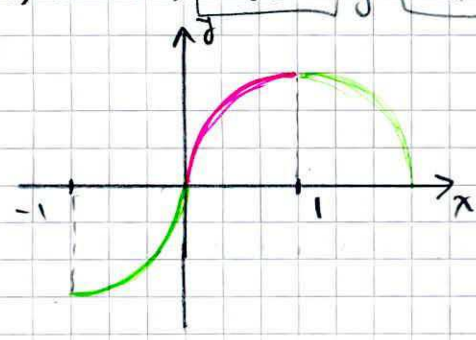
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{L}\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 e^t\,dt = e^t\Big|_0^1 = \boxed{e-1 = \frac{a_0}{2}}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = 2\int_0^1 e^t \cos(n\pi t)\,dt = \frac{2 \cdot e^t(n\pi \cdot \operatorname{sen}(n\pi t) + \cos(n\pi t))}{1^2 + n^2\pi^2}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{1+n^2\pi^2}\cdot\Big(e\,\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n} - 1\Big) = \boxed{\frac{2\,e(-1)^n - 1}{1+n^2\pi^2} = a_n}$$

$$\boxed{S_{(t)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(-1)^n - 1}{1+n^2\pi^2}\cdot \cos(n\pi t)} \checkmark$$

ii) senos $\rightarrow \boxed{a_0 = 0}$ y $\boxed{a_n = 0}$ (función impar) $\quad \boxed{T=2,\ L=1\quad \omega=\pi}$



$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } 0<t<1 \\ -e^{-t} & \text{si } -1<t<0 \end{cases}, \quad y\ f(t) = f(t+2)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)\,dt =$$

$$= 2\int_0^1 e^t \operatorname{sen}(n\pi t)\,dt = 2\cdot\left[e^t\left(\frac{\operatorname{sen}(n\pi t) - n\pi\cos(n\pi t)}{1+(n\pi)^2}\right)\right]\Bigg|_0^1 =$$

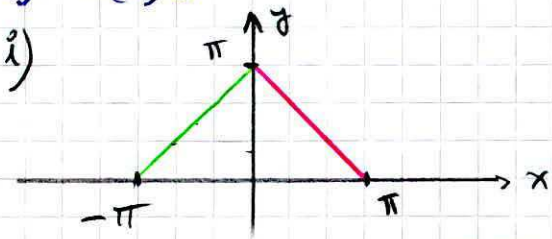
$$= \frac{2}{1+n^2\pi^2}\cdot\Big[e\,\big(-n\pi\,\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}\big) + (n\pi)\Big] = \frac{-2}{1+n^2\pi^2}\left(e\,n\pi(-1)^n + n\pi\right) =$$

$$= \boxed{\frac{-2\,n\pi}{1+n^2\pi^2}\left(e(-1)^n + 1\right) = b_n}$$

$$\boxed{S_{(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2}\left(1 - e(-1)^n\right)\cdot \operatorname{sen}(n\pi t)} \checkmark$$

d) $f(t) = \pi - t \qquad 0<t<\pi$

i)



$$f(t) = \begin{cases} \pi - t & \text{si } 0<t<\pi \\ \pi + t & \text{si } -\pi<t<0 \end{cases} \quad \text{y } f(t) = f(t+2\pi)$$

$T = 2\pi \qquad L = \pi \qquad \omega = 1 \leftarrow \frac{\pi}{\pi}$

función par $\rightarrow \boxed{b_n = 0}$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} \pi - t \, dt = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\pi t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(n\omega t)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \cos(nt) - t\cos(nt)\, dt =$$

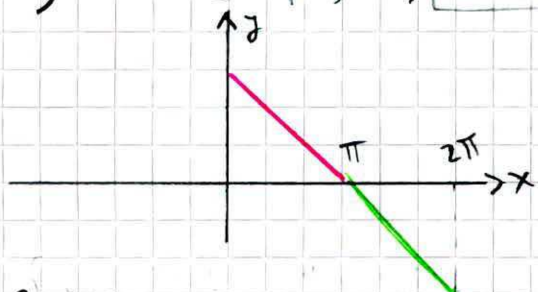
$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\pi \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n} - \frac{\cos(nt)}{n^2} - t\frac{\operatorname{sen}(nt)}{n} \right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi n^2} \left(\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n} - 1\right)$$

si n impar $= -2$

Si n es par $\rightarrow a_n = 0$, si n es impar: $n = 2k+1 \rightarrow \boxed{a_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)^2}}$

$$\boxed{S(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)t)}$$

ii) senos (impar) $\rightarrow \boxed{a_0 = a_n = 0} \qquad T = 2\pi, \ L = \pi, \ \omega = 1$



$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen}(n\omega t)\, dt =$$

$$= 2 \int_0^{\pi} (\pi - t) \operatorname{sen}(nt)\, dt =$$

$f(t) = \pi - t \quad 0<t<2\pi, \ f(t) = f(t+2\pi)$

$$= 2 \int_0^{\pi} \pi \operatorname{sen}(nt) - t\operatorname{sen}(nt)\, dt =$$

$$= 2\left(-\pi \frac{\cos(nt)}{n} - \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n^2} + \frac{t\cos(nt)}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{n}\left(-\cancel{\pi\cos(n\pi)} + \cancel{\pi\cos(n\pi)} + \pi\right)$$

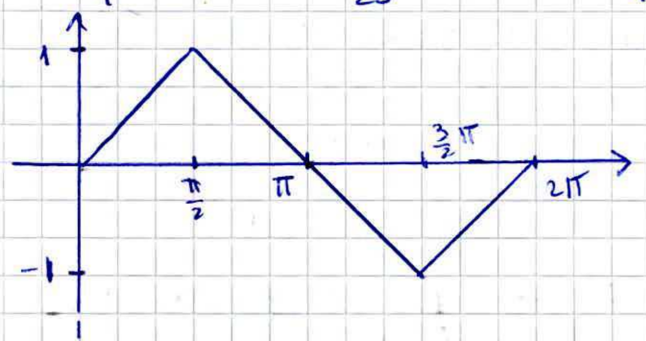
$$= \boxed{\frac{2\pi}{n} = b_n}$$

$$\boxed{S(t) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nt)}$$

Mat. Sup.

(5) El desarrollo en serie de Fourier de la onda triangular (ver figura) es:

$$S(x) = \frac{8}{\pi^2}\left(\text{sen}(\omega t) - \frac{1}{9}\text{sen}(3\omega t) + \frac{1}{25}\text{sen}(5\omega t) - \frac{1}{49}\text{sen}(7\omega t) + \dots\right)$$



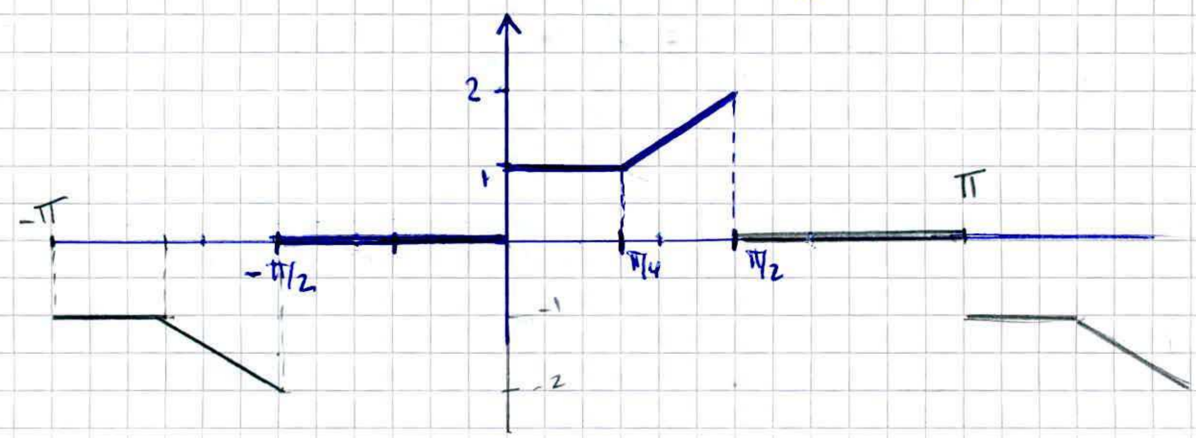
a) ¿por qué sólo aparecen términos con senos?

Porque es una función impar

b) ¿por qué sólo aparecen términos con frecuencias impares?

Solo aparecen términos con fr. impares pues es una función con simetría de media onda

(6) Dada la siguiente función definida en $[-\pi/2, \pi/2]$



Complete la función en $[-\pi, \pi]$ para que tenga simetría de media onda

(7) a) Si una función es par y además tiene simetría de media onda ¿qué términos serán nulos de la Serie trigonométrica de Fourier?

Serán nulos todos los términos con senos y los de frecuencias pares de cosenos

b) Sea $S(x) = -\pi/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{2n-1}}{n}\text{sen}(nx)$ la STF de $f(x)$
¿Puede ser $f(x)$ una f. par? ¿O impar? Justifique

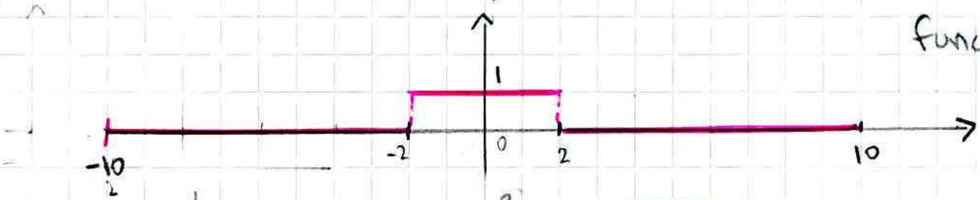
No puede ser par ni impar pues hay términos con senos y cosenos

Sylvina

PARTE 2 | Serie exponencial de Fourier

(8) Dados las sig. funciones, grafíquelas, desarróllelas en Serie Exponencial de Fourier y grafique el espectro de amplitud de frecuencias :

a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 < t < 2 \\ 0 & \text{si } 2 < |t| < 10 \end{cases}$ y $f(t) = f(t+20)$



función par → $\boxed{b_n = 0}$

$T = 20$
$L = 10$
$\omega = \frac{\pi}{10}$

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt = \frac{1}{20}\cdot 2 \cdot \int_{0}^{2} 1\,dt = \boxed{\frac{1}{5} = C_0}$$

$$C_m = \frac{a_n - j\,b_n}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot e^{-j(m\omega x)}\,dx$$

$$C_m = \frac{1}{20}\int_{-2}^{2} e^{-j\left(m\frac{\pi}{10}x\right)}\,dx = \frac{1}{20}\left(-\frac{e^{-j\left(m\frac{\pi}{10}x\right)}}{jm\frac{\pi}{10}}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{-1}{2jm\pi}\left(e^{-j\frac{m\pi}{5}} - e^{j\frac{m\pi}{5}}\right) = C_m$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha) = j\,\frac{e^{-j\alpha} - e^{j\alpha}}{2}} \quad ; \quad \frac{-1}{2jm\pi} = \frac{j}{j}\,\frac{(-1)}{2jm\pi} = \frac{-j}{(-1)2m\pi} = \frac{j}{2m\pi}$$

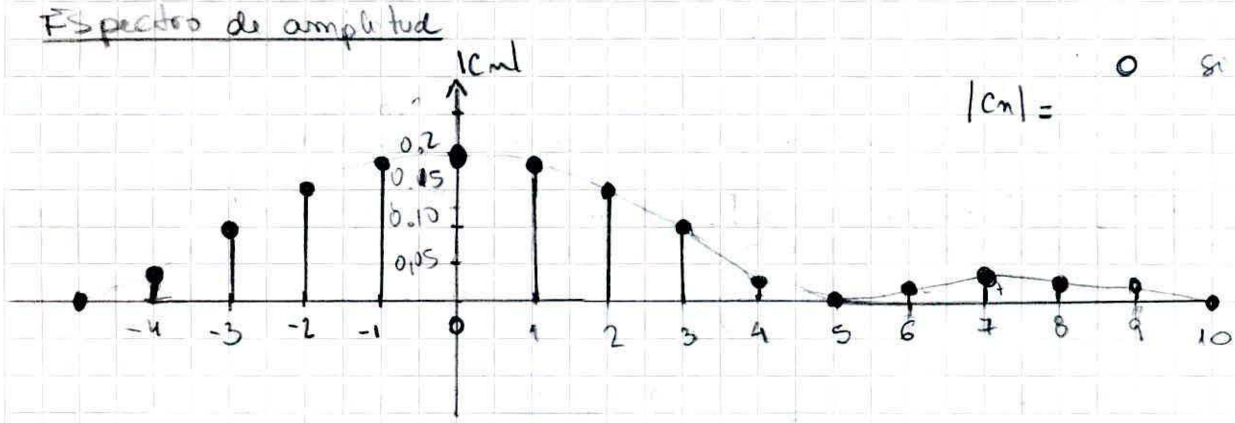
$$\to C_m = \frac{-1}{2jm\pi}\left(e^{-j\frac{m\pi}{5}} - e^{j\frac{m\pi}{5}}\right) = \frac{j}{2m\pi}\left(e^{-j\frac{m\pi}{5}} - e^{j\frac{m\pi}{5}}\right) \to \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}m\right)$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{m\pi}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{5}\right)} \to \boxed{Sf_{(t)} = \frac{1}{5} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{5}\right)}{m\pi}\cdot e^{j\left(\frac{m\pi x}{10}\right)}}$$

$$C_{-m} = \overline{C_m}$$

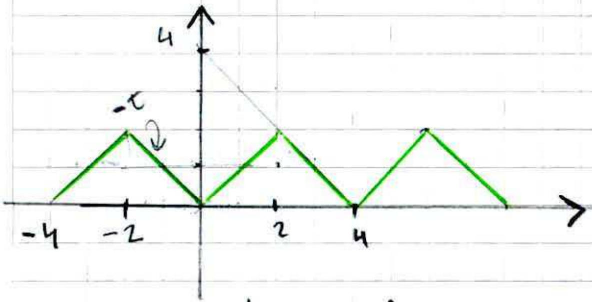
Espectro de amplitud

$|C_n| = 0$ si $n \equiv 0 (5)$



$\int x e^{ax} dx = \dfrac{x e^{ax} - e^{ax}}{a}$

8. b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in (0,2) \\ 4-t & \text{si } t \in (2,4) \end{cases}$ y $f(t+4) = f(t)$



Función par $\rightarrow b_n = 0$

$T = 4 \quad L = 2 \quad \omega = \frac{\pi}{2}$

$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, dt = \frac{1}{4} \times 2 \int_0^2 t\, dt = \boxed{1 = C_0}$

$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt = \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^{0} -t\, e^{-jn\frac{\pi t}{2}}\, dt + \int_0^2 t\, e^{-jn\frac{\pi t}{2}}\, dt \right] =$

$a = -jn\frac{\pi}{2}$

$= \frac{1}{4} \left[-\left(\frac{t e^{-jn\frac{\pi}{2}t} - e^{-jn\frac{\pi}{2}t}}{-jn\frac{\pi}{2}} \right) \Bigg|_{-2}^{0} + \left(\frac{t e^{-jn\frac{\pi}{2}t} - e^{-jn\frac{\pi}{2}t}}{-jn\frac{\pi}{2}} \right) \Bigg|_0^2 \right] =$

$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{t e^{-jn\frac{\pi}{2}t} - e^{-jn\frac{\pi}{2}t}}{-jn\frac{\pi}{2}} \right) \Bigg|_0^{-2} + \left(\frac{t e^{-jn\frac{\pi}{2}t} - e^{-jn\frac{\pi}{2}t}}{-jn\frac{\pi}{2}} \right) \Bigg|_0^2 \right] =$

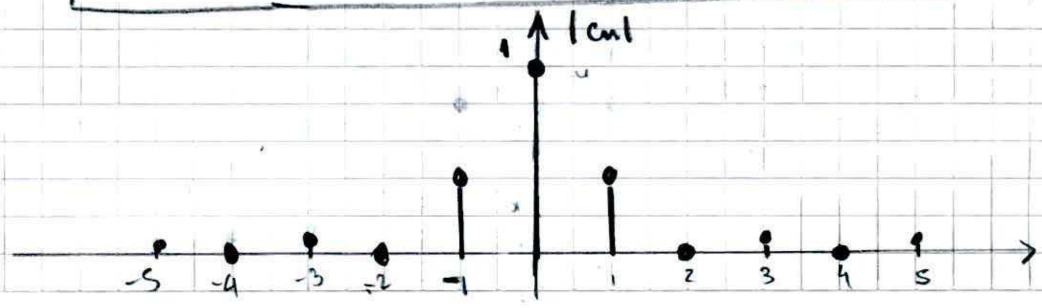
$= -\frac{1}{2jn\pi} \left[-2e^{jn\pi} - e^{jn\pi} + 1 + 2e^{-jn\pi} - e^{-jn\pi} + 1 \right] =$

$= -\frac{1}{2jn\pi} \left(-3e^{jn\pi} + e^{-jn\pi} + 2 \right)$?

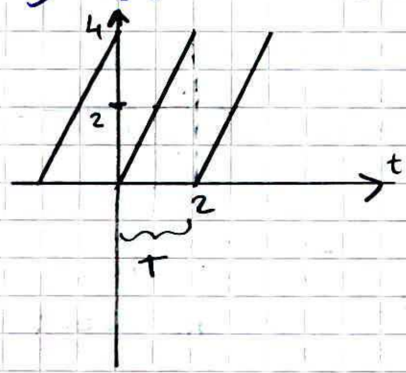
S(ej. 4.b) $\rightarrow C_0 = \frac{a_0}{2} = 1 \qquad a_n = a_{2k+1} = \frac{-8}{(2k+1)^2 \pi^2}$

$C_n = \frac{a_n - j\cancel{b_n}^{\,0}}{2} = \frac{-4}{(2k+1)^2 \pi^2} \rightarrow C_{-n} = \overline{C_n} = C_n$ es real

$$\boxed{S_{f(t)} = 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2 \pi^2} \cdot e^{j(2k+1)\frac{\pi}{2}t}}$$



8.c) $f(t) = 2t$ si $t \in [0,2)$ y $f(t) = f(t+2)$



$T = 2 \rightarrow L = 1 \rightarrow \omega = \pi$

$C_0 = \frac{a_0}{2} = \boxed{2 = C_0}$

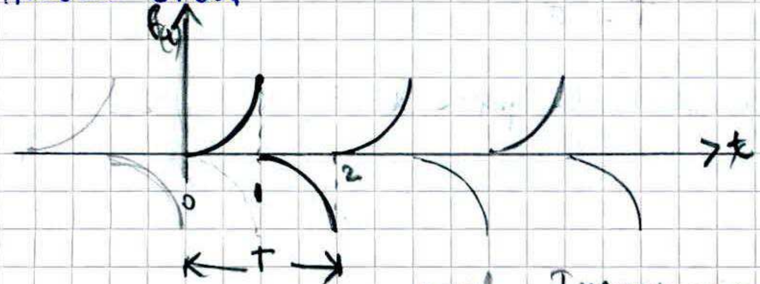
$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt = \frac{1}{\cancel{2}} \int_0^2 \cancel{2} t \cdot e^{-jn\pi t}\, dt =$

$= \frac{1}{-jn\pi} \cdot (t-1)\, e^{-jn\pi t} \Big|_0^2 = \frac{1}{-jn\pi} \left(e^{-jn2\pi} - 1 \right)$

$C_n = \frac{j}{n\pi} \cdot (0 - 1) = \frac{-j}{n\pi}$

Mat Sup.

9) a) Sea $f(t) = t^2$ si $0 \leq t < 1$. Complete en forma gráfica y analítica la función para que el desarrollo en Serie Exponencial de Fourier tenga coeficientes imaginarios puros y, además, $f(t)$, tenga simetría de media onda



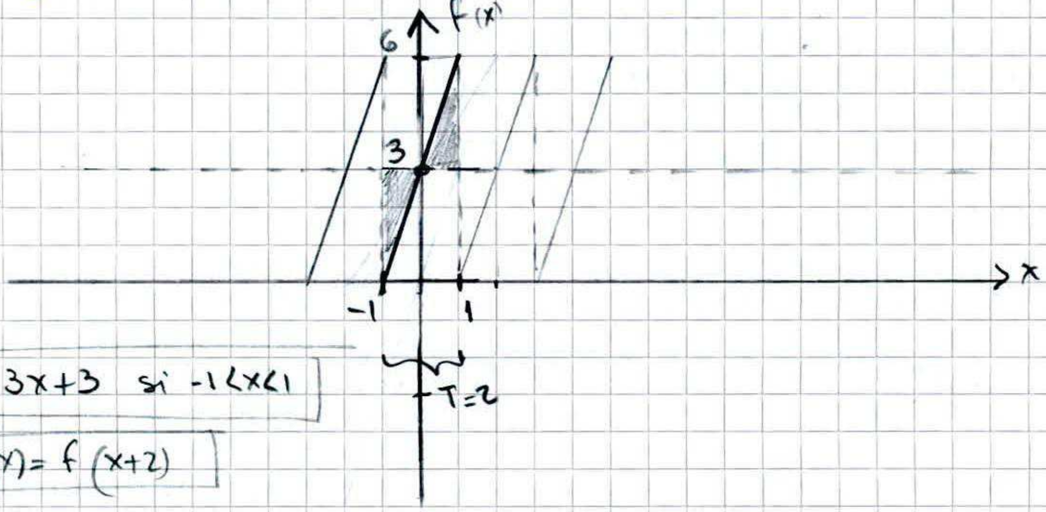
$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -(t-1)^2 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

$f(t) = f(t+2)$

coef. Imaginarios puros → función impar (pues $a_n = 0$)

Simetría de media onda → simetría refleja en eje x trasladada $\frac{T}{2}$

b) Dé un ejemplo de una función periódica $f(x)$ con $T = 2$ tal que los coeficientes de la Serie Exponencial de Fourier sean todos Imaginarios puros excepto $c_0 = 3$



$f(x) = 3x + 3$ si $-1 < x < 1$

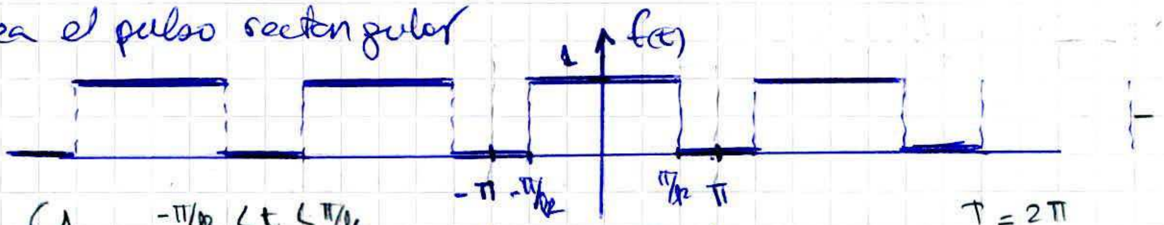
con $f(x) = f(x+2)$

Parte imaginaria pura serie con $\frac{a_0}{2} = a_n = 0$ pero piden que $c_0 = 3$

$c_0 = \frac{a_0}{2} = 3$ entonces busco una función impar o "casi" impar con $c_0 = 3$

Sylvina

(10) Sea el pulso rectangular



$$f(t) = \begin{cases} 1 & -\pi/k \le t < \pi/k \\ 0 & \pi/k \le |t| < \pi \\ f(t+2\pi) \end{cases}$$

$T = 2\pi$

$T = 2\pi$
$L = \pi$
$\omega = 1$

a) Grafique el espectro de amplitud para $k=3$, $k=5$, $k=10$

S.E.F: $S\,f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega t} + C_{-n} e^{-jn\omega t}$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/k}^{\pi/k} 1\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{k} = \boxed{\frac{1}{k} = C_0}$$

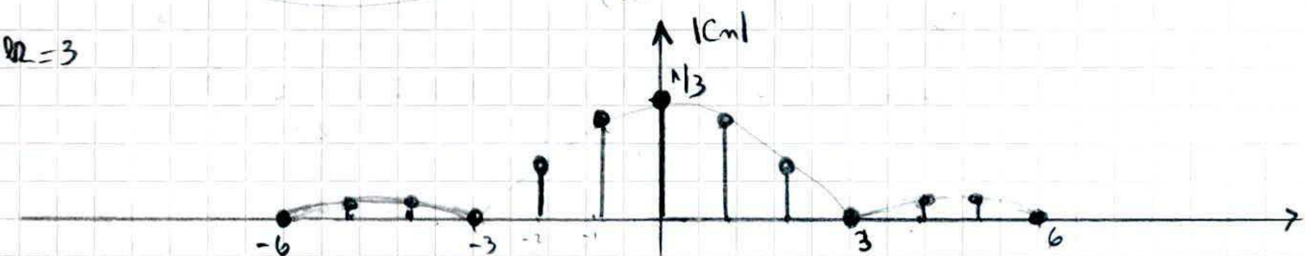
$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-L}^{L} f(t)\,e^{-jn\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/k}^{\pi/k} e^{-jnt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-jnt}}{(-jn)}\Bigg|_{-\pi/k}^{\pi/k} =$$

si $n \neq 0$

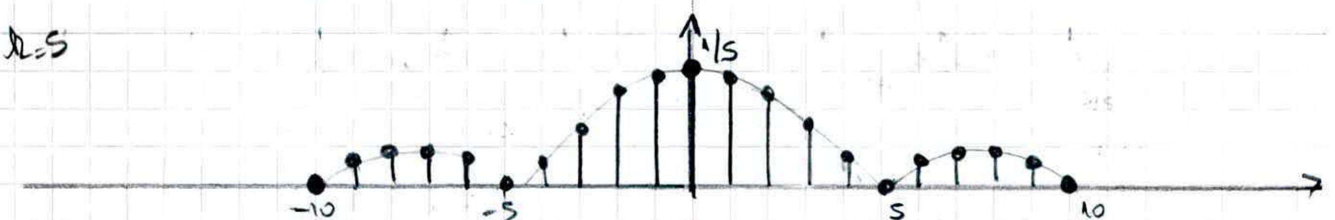
$$= \frac{1}{n\pi}\frac{\left(e^{-jn\frac{\pi}{k}} - e^{jn\frac{\pi}{k}}\right)}{(-2j)} = \boxed{\frac{1}{n\pi}\cdot \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{k}\right) = C_n}$$

$\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{k}\right)$

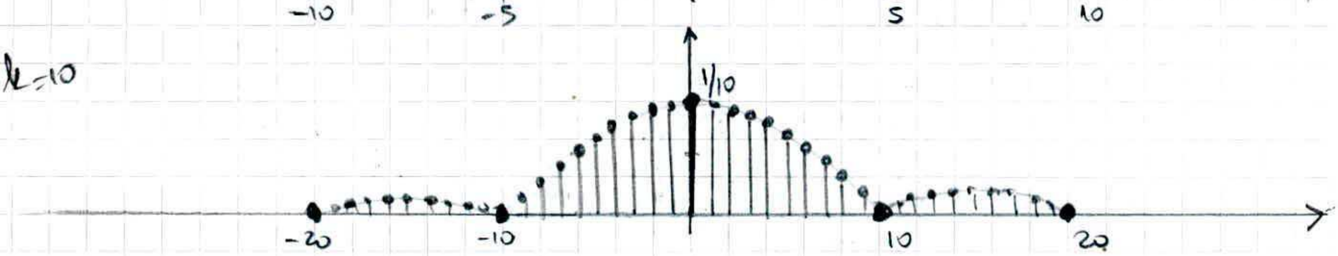
$k=3$



$k=5$



$k=10$



b) ¿qué conclusiones puede sacar?

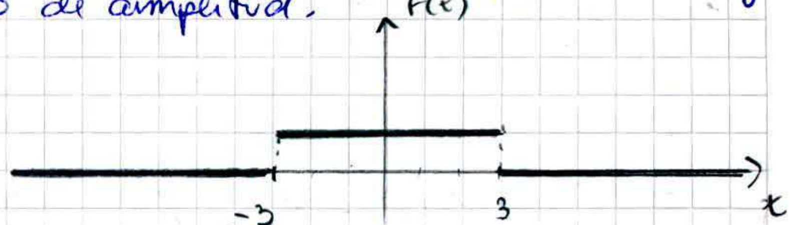
Que forman la misma gráfica en los tres, pero cuanto mayor es n, tiende a ser continua (no discreta)

Mat. Superior

Parte 3 | transformada de Fourier

(11) Halle las transformadas de Fourier de las sig. funciones y dibuje su espectro continuo de amplitud.

a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 3 \\ 0 & \text{si } |t| > 3 \end{cases}$



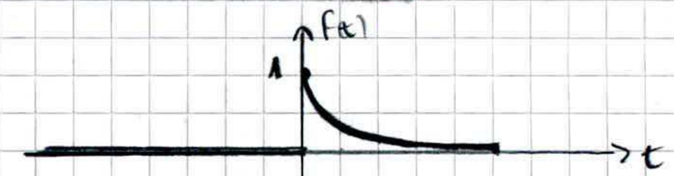
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-3}^{3} e^{-j\omega t}\, dt \overset{\text{si } \omega \neq 0}{=} \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-3}^{3} = \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-3j\omega} - e^{3j\omega}\right) =$$

$$= \frac{2}{\omega(-j)2}\left(e^{-3j\omega} - e^{3j\omega}\right) = \boxed{\frac{2}{\omega}\,\text{sen}(3\omega) = F(\omega)} \quad \text{si } \omega \neq 0$$

- si $\omega = 0$: $F(0) = \int_{-3}^{3} e^{-j0t}\, dt = \int_{-3}^{3} 1\, dt = \boxed{6 = F(0)}$

$$\boxed{F(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\omega}\,\text{sen}(3\omega) & \text{si } \omega \neq 0 \\ 6 & \text{si } \omega = 0 \end{cases}}$$ ✓

b) $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

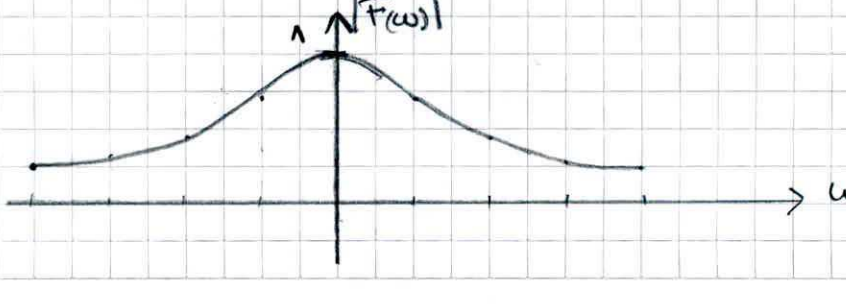


$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) . e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t - j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+j\omega)}\, dt = \left.\frac{1}{-(1+j\omega)}\, e^{-t(1+j\omega)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{-1}{1+j\omega}(0-1) = \frac{1}{1+j\omega}$$

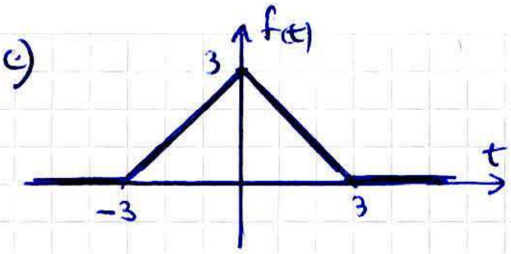
$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}}$$ ✓

Cuando es complejo, se grafica el módulo de $F(\omega) \rightarrow |F(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$



Syl

c)



$$f(t) = \begin{cases} 3-t & \text{si } 0<t<3 \\ 3+t & \text{si } -3<t<0 \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-3}^{0} (3+t)\, e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{3} (3-t)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-3}^{0} 3e^{-j\omega t} + t e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{3} 3e^{-j\omega t} - t e^{-j\omega t}\, dt =$$

si $\omega \neq 0$

$$= \left[\frac{3e^{-j\omega t}}{-j\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\left(t - \frac{1}{-j\omega}\right)\right]\Bigg|_{-3}^{0} + \left[\frac{3e^{-j\omega t}}{-j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\left(t - \frac{1}{-j\omega}\right)\right]\Bigg|_{0}^{3} =$$

$$= \frac{-1}{j\omega}\left[\cancel{3} + \left(\frac{1}{j\omega}\right) - 3e^{3j\omega} - e^{3j\omega}\left(-3 + \frac{1}{j\omega}\right) + 3e^{-3j\omega} - e^{-3j\omega}\left(3 + \frac{1}{j\omega}\right) \cancel{-3} + \frac{1}{j\omega}\right] =$$

$$= \frac{1}{j\omega}\left[\frac{2}{j\omega} \cancel{- 3e^{3j\omega}} \cancel{+ 3e^{3j\omega}} - \frac{e^{3j\omega}}{j\omega} \cancel{+ 3e^{-3j\omega}} \cancel{- 3e^{-3j\omega}} - \frac{e^{-3j\omega}}{j\omega}\right] =$$

$$= \frac{1}{j\omega}\left[\frac{2}{j\omega} - \left(\frac{e^{3j\omega} + e^{-3j\omega}}{j\omega}\right)\right]$$

?

Mat Sup
Transf. Fourier.

(12) En base al ejercicio anterior (parte (a)), calcule el valor de la integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{sen(x)}{x}\, dx.$$

(Ver guía teórica, pág 67)

$$F(\omega) = \begin{cases} 2\,\dfrac{sen(3\omega)}{\omega} & si\ \omega \neq 0 \\ 6 & si\ \omega = 0 \end{cases}$$

Antitransformada: $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 2\,\frac{sen(3\omega)}{\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega$

Si $\omega = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow 1 = \dfrac{1}{\cancel{2}\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cancel{2}\,\frac{sen(3\omega)}{\omega}\, \underbrace{e^{0jt}}_{1}\, d\omega =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(3\omega)}{\omega}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3\,sen\,3\omega}{3\,\omega}\, d\omega$$

Cambio de variable: $x = 3\omega \longrightarrow dx = 3\, d\omega \Rightarrow d\omega = \dfrac{dx}{3}$

$$\rightarrow 1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(3\omega)}{\omega}\, d\omega \overset{C.Var.}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x)}{\omega}\,\frac{dx}{3} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x)}{x}\, dx$$

$$\rightarrow 1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x)}{x}\, dx \rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x)}{x}\, dx = \pi}$$

$$y: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x)}{x}\, dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{sen(x)}{x}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{sen(x)}{x}\, dx}_{por\ simetría:\ 2\int_0^{\infty} \frac{sen(x)}{x}\, dx}$$

$$\rightarrow \pi = 2\int_0^{\infty} \frac{sen(x)}{x}\, dx \rightarrow \boxed{\int_0^{\infty} \frac{sen(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}}$$

Sylvina

PARTE 4: Ejercicios varios.

(13) Desarrolle $f(t) = sen^5(t)$ en SdF (Sugerencia: desarrolle binomio de Newton)

$[sen(t)]^5$ es una función IMPAR $\rightarrow a_0 = a_n = 0$

además tiene simetría de media onda $\rightarrow b_{2k} = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (sen(t))^5 \, sen(nt)\, dt$$

			1			0
		1	1			1
	1	2	1			2
	1	3	3	1		3
1	4	6	4	1		4
1	5	10	10	5	1	5

$$sen(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \rightarrow (sen(t))^5 = \frac{(e^{jt} - e^{-jt})^5}{32j} =$$

$$= \frac{1}{32j}\left(e^{5jt} - 5e^{4jt} \cdot e^{-jt} + 10e^{3jt}e^{-2jt} - 10e^{2jt}e^{-3jt} + 5e^{jt}e^{-4jt} - e^{-5jt}\right) =$$

$$= \frac{1}{32j}\left[\left(e^{5jt} - 5e^{3jt} + 10e^{jt} - 10e^{-jt} + 5e^{-3jt} - e^{-5jt}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(\frac{e^{5jt} - e^{-5jt}}{2j}\right) - 5\left(\frac{e^{3jt} - e^{-3jt}}{2j}\right) + 10\left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right)\right] =$$

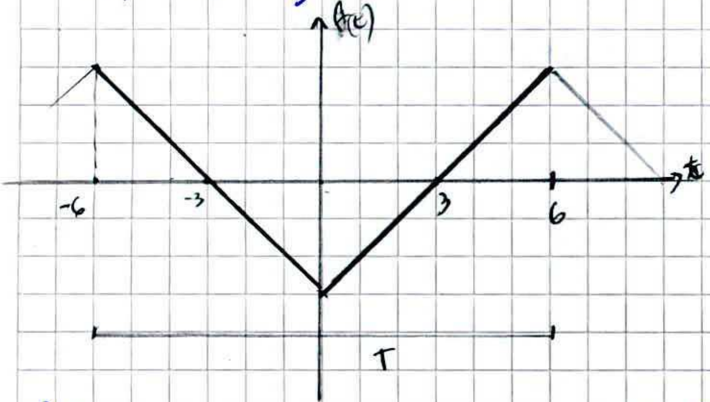
$$= \frac{1}{16}\left(sen(5t) - 5\, sen(3t) + 10\, sen(t)\right) =$$

$$= \boxed{\frac{16}{10} sen(t) - \frac{5}{16} sen(3t) + \frac{1}{16} sen(5t) = f(t)}$$

Mat Sup.
transf. Fourier

(14) Analice la validez de los sig. afirmaciones, justificando su respuesta:

a) El desarrollo en S.T.F. de la función $f(t) = |t| - 3$ para $t \in (-6, 6)$ y $f(t) = f(t+12)$ sólo tiene términos con cosenos de frecuencias pares



Es una función par → solo cosenos

pero tiene simetría de media onda → frecuencias impares

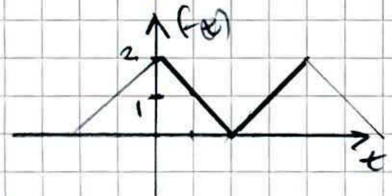
$\boxed{F}$

b) Los coef. C_n del desarrollo S.E.F. de la función anterior son todos reales

es V pues es una función par

$\boxed{V}$

c) El desarrollo en STF de la función $f(t) = |t-2|$ para $t \in (0,4)$ y $f(t) = f(t+4)$ sólo tiene términos con frecuencias impares



Es una función con simetría de media onda → frecuencias impares
desplazada hacia arriba

$\boxed{V}$

d) Los coef. C_n del desarrollo en SEF de la función anterior son imaginarios puros

$\boxed{F}$

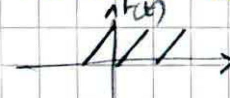
$C_0 = 1$ → no es imaginario puro

e) Si el desarrollo en STF de una función $f(t)$ sólo tiene términos con frecuencias impares entonces $f(t)$ tiene simetría de media onda

$\boxed{F}$

El contraejemplo puede ser el del inc. c.

f) Si el desarrollo en STF de una función $f(t)$ no tiene términos con cosenos entonces $f(t)$ es una función impar



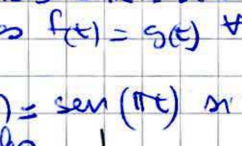
No es una función impar y sólo tiene términos con senos (ver ej. 2, d)

$\boxed{F}$

g) Sean f y g funciones periódicas dom $\in \mathbb{R}$. Si el desarrollo en series de Fourier de f es el mismo que el de g entonces $f(t) = g(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$\boxed{F}$

h) Al desarrollar la función $f(t) = \text{sen}(\pi t)$ si $t \in (0,1)$ y $f(t) = f(t+1)$ en SEF sólo hay términos con coef. reales



Par → coef c_n reales

$\boxed{V}$

Sig

EJERCICIOS PARA MARCAR LA RESPUESTA CORRECTA, tomados en Findes.

(16) Marcar la única respuesta correcta de cada item:

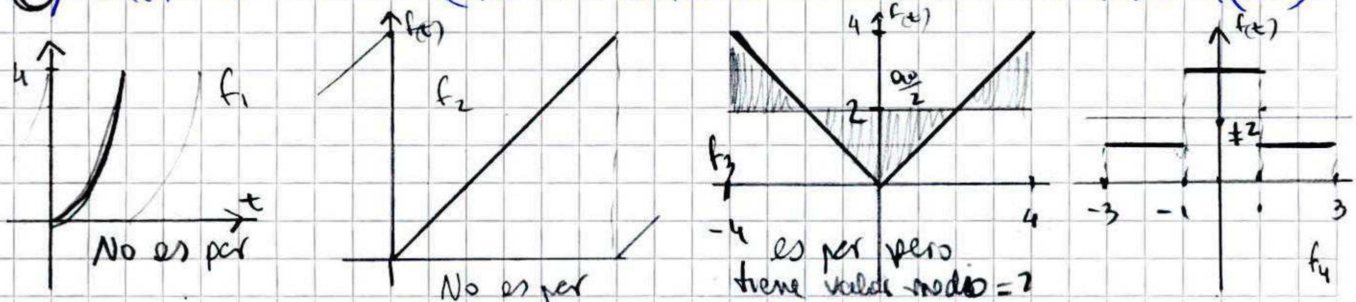
① De las sig. funciones, la que tiene la STF solo de $\underbrace{\text{cosenos}}_{\text{par}}$ con valor medio distinto de 2 es:

~~a)~~ $f_1(t) = t^2$ si $t \in (0,2) \wedge f_1(t) = f_1(t+2)$

~~b)~~ $f_2(t) = t$ si $t \in (0,6) \wedge f_2(t) = f_2(t+6)$

~~c)~~ $f_3(t) = t$ si $t \in (0,4) \wedge f_3(t) = -t$ si $t \in (-4,0) \wedge f_3(t) = f_3(t+8)$

d) $f_4(t) = 3$ si $t \in (-1,1) \wedge f_4(t) = 1$ si $1 < |t| < 3 \wedge f_4(t) = f_4(t+6)$



② De las sig. funciones, la que tiene la SEF con $\underbrace{\text{coef. reales}}_{\text{función par}}$ y solo de frecuencias impares es:

~~a)~~ $f_1(t) = t^2$ si $t \in (-2,2) \wedge f_1(t) = f_1(t+4)$
es par pero es $\forall n$ (ver ej. 1.c)

~~b)~~ $f_2(t) = t$ si $t \in (0,4) \wedge f_2(t) = f_2(t+4)$
no es par

c) $f_3(t) = t$ si $t \in (0,4) \wedge f_3(t) = -t$ si $t \in (-4,0) \wedge f_3(t) = f_3(t+8)$
es par y tiene simetría de media onda (desplazada)

d) $f_4(t) = 3$ si $t \in (-1,1) \wedge f_4(t) = 1$ si $1 < |t| < 3 \wedge f_4(t) = f_4(t+6)$

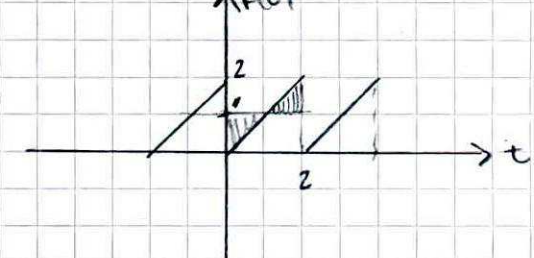
③ La función $f(t) = t$ en $(0,2)$ y $f(t) = f(t+2)$ tiene su STF:

a) sólo con senos $\quad \frac{a_0}{2} \neq$ sen

b) solo con cosenos $\quad$ No es par

c) con valor medio 1

d) Ninguna de las anteriores



Mat Sup
transf. Fourier

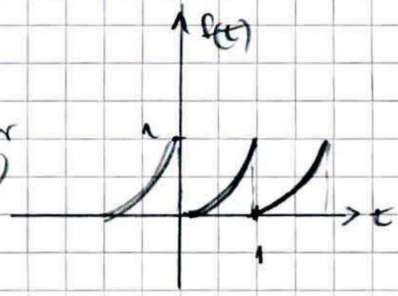
④ Los coef. de la SEF de $f(x) = x^2$ en $(0,1)$ ~~a~~ $f(x) = f(x+1)$ son:

~~a) todos reales~~ (no es par)

~~b) todos imaginarios puros~~ (no es impar ni impar desplazado)

c) uno real y los demás imaginarios

d) ninguna es correcta



⑤ La función $f(t) = e^{|t|}$ en $[-1,1]$ y $f(t) = f(t+2)$ tiene su desarrollo en SEF:

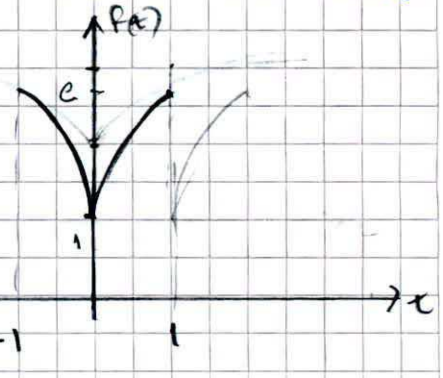
~~a) con valor medio nulo.~~

~~b) sólo frecuencias impares~~

c) sin términos con senos ← es par

d) sólo frecuencias pares

$\frac{a_0}{2} \neq 0$



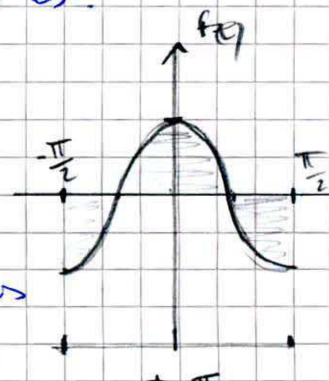
⑥ La serie trig. de Fourier de $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)$ es:

a) la misma función

~~b) Una serie con infinitos términos no nulos en senos~~

c) un solo término $\quad a_0 = 0$ sí no / no

~~d) Una serie con infinitos términos no nulos en cosenos~~



$f(t) = 2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) = \cos(2t) \rightarrow$ es par $\rightarrow b_n = 0$.

$a_0 = 0$; $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2t)\cos(nt)\,dt =$

$p = 2$
$q = n$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\mathrm{sen}[(2-n)t]}{\cancel{2}(2-n)} + \frac{\mathrm{sen}[(2+n)t]}{2(2+n)}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\mathrm{sen}\left[\pi - \frac{n\pi}{2}\right]}{2-n} + \frac{\mathrm{sen}\left(\pi + \frac{n\pi}{2}\right)}{2+n}\right) \rightarrow$$

n	①	②
0	0	0
1	1	-1
2	0	0
3	-1	1

$\neq 0$

Sylvina

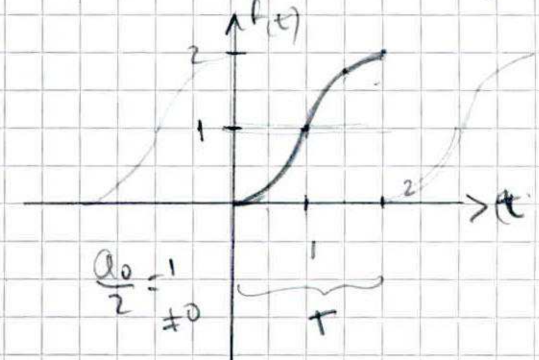
7) Dada $f(t) = t^2$ si $t \in (0,1)$ ∧ $f(t) = 2 - (t-2)^2$ si $t \in (1,2)$ ∧ $f(t) = f(t+2)$ entonces su STF es:

a) sin cosenos

b) con valor medio $\frac{a_0}{2} = 0$

c) sólo de cosenos — no, pues no es par

d) sólo de frecuencias impares



$\frac{a_0}{2} = 1 \neq 0$

8) La STF: $S(x) = 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(n \frac{\pi}{2} x\right)$ puede corresponder a:

función par

$\frac{a_0}{2} = 1$

a) $f(x) = 2 - |x|$ si $x \in (-2,2)$ ∧ $f(x) = f(x+4)$

b) $f(x) = x^2$ si $x \in (-2,2)$ ∧ $f(x) = f(x+4)$

c) $f(x) = x$ si $x \in (0,4)$ ∧ $f(x) = f(x+4)$

d) Ninguna de las anteriores

par ⇒ cosenos ✓

$\frac{a_0}{2} = 1$ ✓

frecuencias impares ✓
(tiene sim. de 1/2 onda con desplazam.)

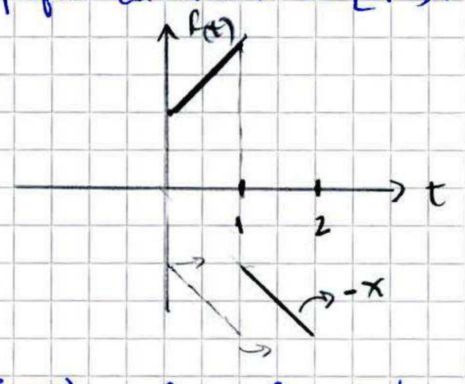
9) Dada la función $f(x) = x+1$ en $[0,1)$ para que tenga simetría de media onda con período $T=2$ hay que definirla en $[1,2)$:

a) $x+1$

b) $-x$

c) $-x-1$

d) $-x+1$



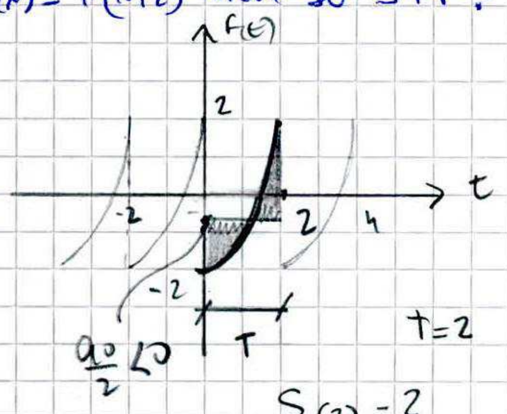
10) La señal: $f(x) = x^2 - 2$ si $x \in [0,2)$ y $f(x) = f(x+2)$ tiene su STF:

a) con valor medio negativo

b) sólo de senos — no es impar ni " despl.

c) tal que $S(2) = -2$

d) ninguna de las anteriores



$\frac{a_0}{2} < 0$

$S(2) = 2$

RESPUESTAS EJERCICIOS DE FOURIER:

☑ Ej. 1:

a) $S(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4}{n}\pi\ \text{sen}(nx)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

c) $S(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nt)$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

☑ Ej. 2:

a) $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\text{sen}[(2k+1)\ \frac{\pi}{3}x]$

b) $S(t) = 3 + \frac{12}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\cos[(2k+1)\ \frac{\pi}{4}t]$

c) $S(t) = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n}\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$

d) $S(t) = 20 - \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ \text{sen}\frac{n\pi t}{5}$

☑ Ej. 3:

a) $f(t) = t + 2$ en $(-4,0)$ b) $S(t) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left[\frac{(2k-1)\pi nt}{4}\right]$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

☑ Ej. 4:

i) a) $S(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4n^2)\pi}\cos(2nx)$

b) $S(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos[(2k+1)\ \frac{\pi}{2}x]$ c) $S(t) = \cos(t)$

d) $S(t) = e - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(e(-1)^n - 1)}{1+n^2\pi^2}\cos(n\pi t)$

ii) a) $S(x) = \text{sen}(x)$ b) $S(x) = -4 \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n\pi}\text{sen}\ (n\frac{\pi}{2}x)$

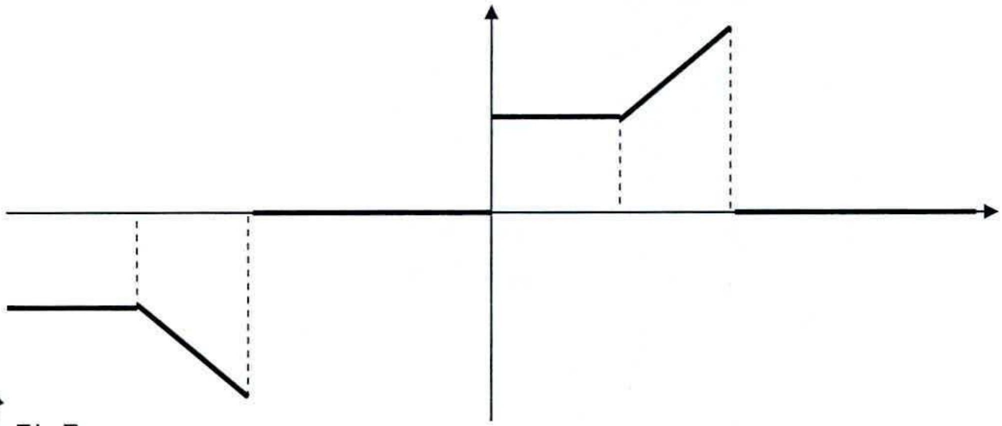
c) $S(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,\text{sen}(2nt)}{4n^2-1}$ d) $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi(1-e(-1)^n)}{1+n^2\pi^2}\ \text{sen}(n\pi t)$

Ej. 5:

a) Aparecen solamente términos con senos porque la función es impar.
b) Sólo aparecen términos con frecuencias impares ya que la función tiene simetría de madia onda.

Ej. 6:

Para que tenga simetría de media onda debe completarse de la siguiente forma:



Ej. 7:

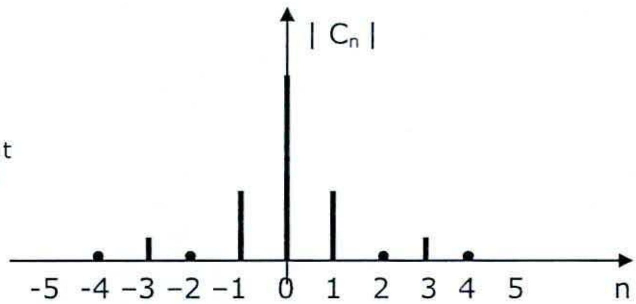
a) Si una función es par y además tiene simetría de media onda, serán nulos todos los términos con senos y los de frecuencias pares de cosenos.

b) La función no puede ser par ni impar, ya que la Serie tienen tanto términos con senos y con cosenos.

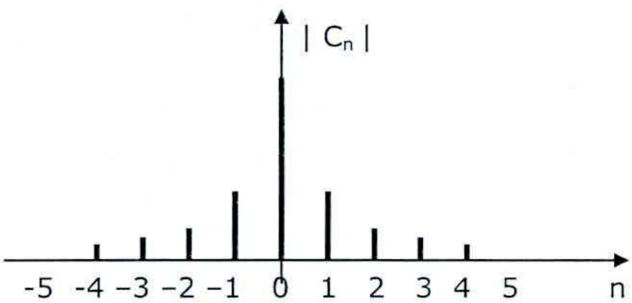
Ej. 8:

a) $f(t) = \frac{1}{5} + \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\frac{\pi}{5})}{n\pi} e^{j(n w x)}$

b) $S(t) = 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2\pi^2} e^{j(2k+1)\frac{\pi}{2}t}$



c) $S(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2j}{n\pi} e^{jn\pi t} - \frac{2j}{n\pi} e^{-jn\pi t}$



Ej. 9:

a) f se debe completar de forma impar y con simetría de media onda:

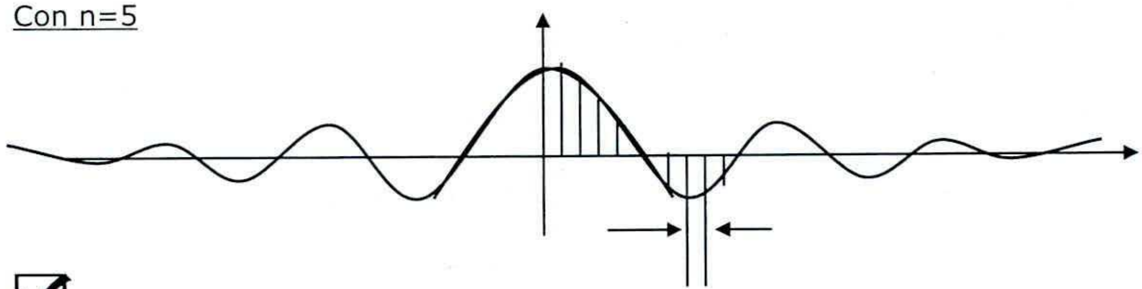
$f(t) = -(t+2)^2$ en $(-2,-1)$ $\wedge$ $f(t) = -t^2$ en $(-1,0)$ $\wedge$ $f(t) = (t-2)^2$ en $(1,2)$

b) Por ejemplo: $f(x) = 2x + 1$ en $(0,2)$ $\wedge$ $f(x) = f(x+2)$

Ej. 10:

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{k})}{n\frac{\pi}{k}} e^{j(n w x)}$$

Con n=5



Ej. 11:

a) $G(w) = 2 \frac{\operatorname{sen}(3w)}{w}$

b) $G(w) = \frac{1}{1+jw}$

c) $G(w) = -2 \frac{\cos(3w)}{w^2}$

d) $G(w) = -4 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}w\right)}{jw}$

e) $G(w) = -\frac{5\,e^{-j5w}}{jw} + \frac{e^{-j5w}-1}{w^2}$

f) $G(w) = \frac{3}{jw} + \frac{1-e^{-j3w}}{w^2}$

Ej. 12: $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

Ej. 13:

$$\operatorname{sen}^5(t) = \frac{5}{8} \bullet \operatorname{sen}(t) - \frac{5}{16} \bullet \operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{16} \bullet \operatorname{sen}(5t)$$

Ej. 14:

a) FALSO b) VERDADERO c) VERDADERO d) FALSO

e) FALSO f) FALSO g) FALSO h) VERDADERO

☑ Ej. 15:

Se representa r(t) por medio de Serie de Fourier:

$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos(t) + \frac{1}{3^2}\cos(3t) + \frac{1}{5^2}\cos(5t) + \bullet\bullet\bullet \right) \qquad (2)$$

Con lo cual r(t) ha quedado descompuesta en una suma de fuerzas senoidales. Vamos a calcular por separado la respuesta a cada una de estas oscilaciones:

$$y'' + 0.02\, y' + 25\, y = \frac{4}{n^2\pi}\cos(nt) \qquad \text{con } n = 1\,,\,3\,,\,5\,,\,\ldots \qquad (3)$$

Observar que el segundo miembro es un solo término de la serie.

La respuesta será de la forma: $y_n = A_n \cos(nt) + B_n \operatorname{sen}(nt)$

Sustituyendo en (3), se despeja:

$$[- n^2 A_n \cos(nt) - n^2 B_n \operatorname{sen}(nt)\,] + 0.02\,[- n A_n \operatorname{sen}(nt) + n B_n \cos(nt)] + 25\,[A_n \cos(nt) + B_n \operatorname{sen}(nt)] = \frac{4}{n^2\pi}\cos(nt)$$

$$\Rightarrow\ [- n^2 A_n + 0.02\, n B_n + 25 A_n] \cos(nt) + [- n^2 B_n - 0.02\, n A_n + 25 B_n]\ \operatorname{sen}(nt) = \frac{4}{n^2\pi}\cos(nt)$$

$$\Rightarrow\ (25 - n^2) A_n + 0.02\, n B_n = \frac{4}{n^2\pi} \ \wedge\ (25 - n^2) B_n - 0.02\, n A_n = 0$$

Por Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25-n^2 & 0.02n \\ -0.02n & 25-n^2 \end{vmatrix} = (25 - n^2)^2 + (0.02n)^2$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} \frac{4}{n^2\pi} & 0.02n \\ 0 & 25-n^2 \end{vmatrix} = \frac{4}{n^2\pi}(25 - n^2) \qquad \Rightarrow A_n = \frac{4}{n^2\pi\Delta}(25 - n^2)$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 25-n^2 & \frac{4}{n^2\pi} \\ -0.02n & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{n^2\pi}\, 0.02\, n = \frac{0.08}{n^2\pi} \quad \Rightarrow\ B_n = \frac{0.08}{n^2\pi\Delta}$$

Como la Ecuación Diferencial es Lineal, la solución en estado estacionario puede obtenerse como suma de las oscilaciones anteriores:

$y = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots$

La amplitud de cada oscilación es: $C_n = \sqrt{{A_n}^2 + {B_n}^2} = \dfrac{4}{n^2 \pi \sqrt{\Delta}}$

Los valores numéricos de las primeras son:

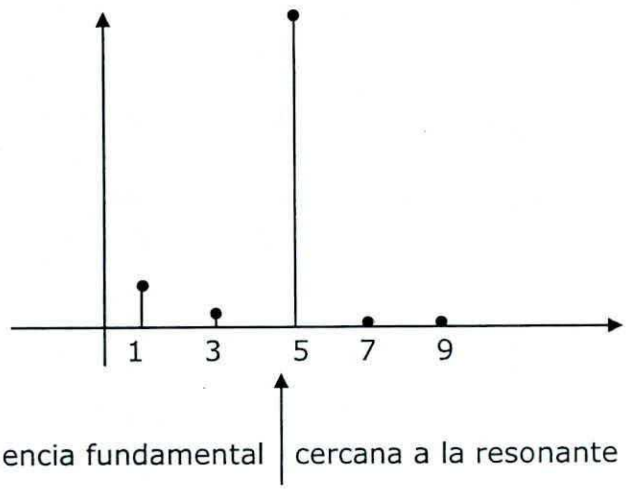
$C_1 = 0.0530$

$C_3 = 0.0088$

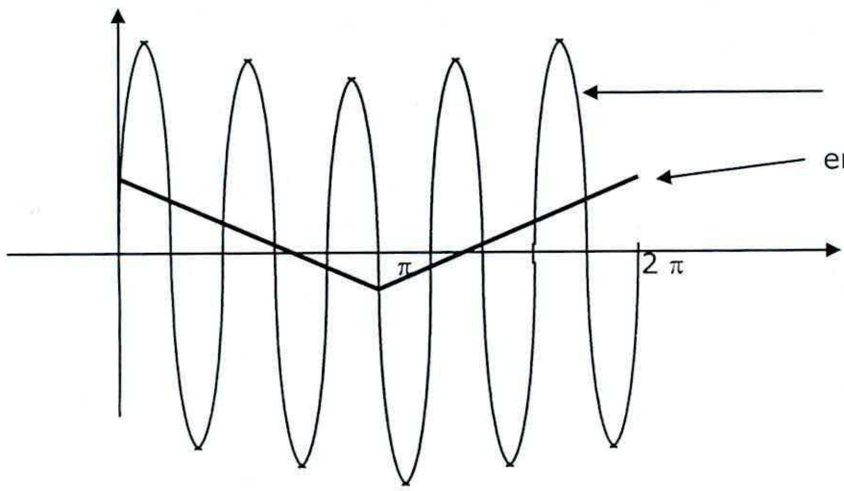
$C_5 = 0.5100$

$C_7 = 0.0011$

$C_9 = 0.0003$



O sea, que la respuesta en estado estacionario es CASI una oscilación armónica cuya frecuencia es 5 veces mayor que la de la fuerza excitadora externa.



☑ Ej. 16:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	c	c	d	c	c	a	a	b	a